SVĚT A PRÁCE.

V. LÁSKA:

POČET PRAVDĚPODOBNOSTI.

V PRAZE 1921.

SVĚT A PRÁCE.

SVAZEK 17.

POČET PRAVDĚPODOBNOSTI.

NAPSAL

Ph. Dr. VÁCLAV LÁSKA,

V. Ř. PROFESOR ČESKÉHO UČENÍ KARLOVA.

S 2 LITHOGRAFOVANÝMI TABULKAMI.

V PRAZE 1921.

NÁKLADEM ČESKÉ MATICE TECHNICKÉ V PRAZE.

REPRODUKCE Z UNIE.

Tiskl Alois Wiesner, knihtiskař České Akademie věd a umění a Českého vysokého učení technického v Praze.

Úvod.

Theorie mathematické pravděpodobnosti byla po dlouhou dobu považována více méně za část t. zv. *zábavné mathematiky*. Možno říci, že si mathematikové hráli s jejími problémy. V novější době proměnila se hračka — jak často se stává — ve velice užitečnou vědu poznáním, že i zákony přírody lze přesvědčivě interpretovati principy, jež tvoří základ algorithmu mathem. náhody.*)

Náhoda — zákon! Není-li to protiklad? A vzdor tomu existují *zákony pro jisté náhody*. Uvědomíme si to snadno, připomeneme-li, že počet pravděpodobnosti zabývá se *nahodilými zjevy určitého charakteru* t. j. určité kollektivní struktury, které se někdy (tedy ne všeobecně) v přírodě a v sociálním životě vyskytují. Počet pravděpodobnosti není proto — a to nutno ihned na počátku zdůrazniti — *uzákoněním všech zdánlivých nepravidelností*, které slovem „*náhoda*" jsme zvyklí jmenovati,[1]) nýbrž jest jen *mírou určité nahodilosti*, kterou nazveme *mathematickou*. Proto může počet ten býti aplikován jen na studium takových zjevů, o nichž lze konstatovati, že jsou jím měřitelny. *Pokusmo* možno ovšem jej *aplikovati* i na jiné vhodné případy, avšak potom jest vždy nezbytný důkaz a posteriori, že jest v tom kterém případě upotřebitelný. Kromě mathematické existují totiž i jiné pravděpodobnosti, jako na př. *logická*,[2]) *geometrická, fysikální* atd. Nerozlišováním jich povstal onen chaos v interpretaci pojmu pravděpodobnosti, který dnes jak ve filosofické tak i mathematické literatuře nabývá netušených rozměrů.

Theorie mathematické pravděpodobnosti jest *součástkou ryzí mathematiky* a tvoří logicko-mathematický systém *nezávislý sice na jsoucnu*, avšak účelně volený, který *za jistých předpokladů* dovoluje sestrojiti obrazy zjevů, jež lze odůvodněně očekávati.

*) Viz na př. *R. Fürth:* Schwankungserscheinungen in der Physik, 1920 (Sammlung Vieweg).

1*

Proto *mohou* a *budou* se výsledky výpočtů odvozených pomocí mathematické theorie pravděpodobnosti „*určitelně někdy*" *shodovati se skutečností*. Pravíme „*někdy*", neboť ani ta největší mathem. pravděpodobnost neznamená ještě aktuální jistotu, poněvadž počet pravděpodobnosti aplikován na skutečnost nevypočítává, *co nastane, nýbrž nejvýše jenom co za určitých předpokladů zpravidla nastává*, aneb určitěji řečeno: *co na základě daných okolností logicky rozumově lze očekávati s risikem co možná nejmenším*.

Kardinální chybou učebnic jednajících o počtu pravděpodobnosti jest, že uvedené momenty nebývají náležitě zdůrazněny. Tím vyvolává se názor, jakoby mathematická pravděpodobnost byla mírou všech pravděpodobností. Nesmíme se pak diviti, že filosofické úvody příruček místo aby pojem mathem. pravděpodobnosti ujasnily a náležitě determinovaly, ještě více jej zatemňují.[3])

S hlediska ryzí mathematiky měly by naše úvahy o počtu pravděpodobnosti vlastně začínati asi tak, jako *Hilbert* začíná svou geometrii. „Mysleme si pojem, který nazveme „mathematická pravděpodobnost". Jaký jest jeho transientní význam, nevíme, avšak my to ani věděti nemusíme a nepotřebujeme. Ano nebylo by dokonce dobře, kdybychom to i jen *věděti chtěli*. Vše, co o tomto pojmu třeba věděti, poví nám totiž axiomy." Bohužel není axiomatika počtu pravděpodobnosti dnes ještě tak zpracována, aby mohla tvořiti úvod do jeho theorie.[4])

V tomto pojetí vystupuje ovšem důrazně *otázka aplikability* tak definovaných mathematických fixí. Volíme-li je svobodně, potom jest třeba vždy uvažovati, *zda algorithmus mathematické pravděpodobnosti* — jak jsme jej stvořili — *jest v daném konkrétním případě aplikabilis či nikoliv*. Výhoda ryze mathematického pojímání počtu pravděpodobnosti spočívá však v tom, že jakmile je jednou problém mathematicky formulován, — t. zn. formulován tak, aby mohl býti algorithmem počtu pravděpodobnosti řešen — přejímá mathematika další zodpovědnost za logickou správnost jeho řešení.

O filosofii počtu pravděpodobnosti proto nejlépe uvažovati až po důkladném prostudování jeho logicko-mathematické stránky, neboť filosofie se svými nejasnými pojmy nemůže býti úvodem do exaktní vědy,[5]) **za to jest nezbytno studovati počet ten souběžně se statistikou.**

I. Pravděpodobnost a priori.

§ 1. Definice.

Vrháme-li kostkou, jejíž stěny jsou označeny čísly 1 až 6, „padne“ buď 1, neb 2, neb 3 atd. a tedy krátce jedno z čísel 1 až 6. Každé číslo jest předem stejně možné čili jak říkáme stejně pravděpodobné.[6]) Abychom napsali uvedenou větu symbolikou mathematiky, označme všeobecně možnost padnutí čísla i písmenou p_i. Rovnost

$$p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = p_5 = p_6$$

bude pak výrazem právě uvedené věty. Z ní plyne bezprostředně rovnice:

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = 6\, p_i, \quad (i = 1, 2, \ldots 6).$$

Poněvadž jedno číslo musí padnouti, jest výraz

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6$$

jako součet všech možností zároveň i výrazem jistoty, kteréžto slovo nahradíme písmenou j. Tím obdržíme rovnici

$$p_i = \frac{1}{6}\, j, \qquad i = 1, 2, 3, \ldots 6,$$

která určuje (*numerickou*) *hodnotu* (*měřenou jednotkou* j) *t. zv. mathematické pravděpodobnosti, že při vrhu šestibokou kostkou padne určité číslo i na př. 3.* Měrnou jednotku j lze samozřejmě voliti libovolně. Nejjednodušeji a nejúčelněji klademe $j = 1$. V důsledku toho obdržíme pro mathem. pravděpodobnost vrhnouti *určité číslo i* číselnou hodnotu $p_i = \frac{1}{6}$. Rovnice $p = 1$ znamená pak jistotu, t. j. že očekávaný fakt jistě se uskuteční a $p = 0$, že zjev je nemožný. Pravděpodobnost na př., že libovolně narýsovaný trojúhelník jest rovnostranný, jest očividně jen mi-

zivě malá. Pravděpodobnost, že slunce zítra vyjde, rovná se téměř jistotě, vzdor tomu nelze ji položiti rovnou jednotce.

Abychom dospěli *k všeobecnější definici pojmu mathem. pravděpodobnosti*, uvažujme následující příklad:

V osudí ať jsou jen bílé a černé koule. Počet bílých koulí ať jest a a počet černých b. Označme dále mathem. pravděpodobnost zjevu „*A*“ (vytáhnouti kouli bílou) písmenou p a zjevu „*non A*“ (vytáhnouti ne-bílou t. zn. zde černou kouli) písmenou q; bude především

$$p + q = 1, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\mathrm{I.})$$

neboť jedno neb druhé musí nastati. Rovnice (I.) obsahuje však dvě neznámé veličiny p a q a nestačí proto sama o sobě k jich stanovení. Druhá k tomu potřebná zní:

$$\frac{p}{q} = \frac{a}{b} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\mathrm{II.})$$

Jest to rovnice do *jisté míry konvencionelní a nedokazatelná*, avšak jak se ukáže v dalších úvahách, *vhodně volená*, neboť každý jiný předpoklad vede k důsledkům, které nejsou shodné se skutečností neb zdravým lidským rozumem. Theorii počtu pravděpodobnosti založenou na obou rovnicích (I.), (II.) nazveme *klassickou*. Z rovnic (I.) a (II.) obdržíme

$$p = \frac{a}{a+b}, \qquad q = \frac{b}{a+b}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\mathrm{III.})$$

Z toho plyne definice veličiny p, kterou podáváme především v klasickém znění:*)

„*Pravděpodobnost p zjevu A jest dána poměrem počtu případů příznivých* (*a*) *s počtem případů možných* (*a* + *b*) *a to za předpokladu, že veškeré případy možné jsou i stejně možné.*“

S takovou definicí nemůže se však přesná věda spokojiti. Zejména *Poincaré***) vytýká jí, že jest do jisté míry *petitio principii*, neboť v ní znamená „*stejně možný*“ zásadně totéž co „*stejně*

*) *Laplace:* Théorie analytique des Probabilités. Introduction. Paris 1912.

**) „La Science et l'Hypothèse“ IV, 11. a téhož „La Science et la Méthode“ I, 4. Uvádí to ostatně výslovně již *Bolzano,* Wissenschaftslehre II, str. 189 (1837), jehož definice k velké škodě vědy zůstaly nepovšimnuty.

pravděpodobný". „Jest možno pravděpodobnost vůbec definovati? ptá se. Známe její definici? Ne-li ale, jakým právem lze ji činiti podkladem našich závěrů? Kdybychom chtěli *pravděpodobnost definovati zlomkem, jehož čitatel udává počet příznivých a jehož jmenovatel sečítá počet všech možných zjevů*, následující příklad poučil by nás ihned o nedostatečnosti našeho počínání.

Házíme dvěma kostkami a ptáme se po pravděpodobnosti, že alespoň na jedné z nich objeví se číslo 6.

Počet všech možných případů jest zde $6 \times 6 = 36$, a to

1, 1	1, 2	1, 3	1, 4	1, 5	**1, 6**
	2, 1	3, 1	4, 1	5, 1	**6, 1**
2, 2	2, 3	2, 4	2, 5	**2, 6**	
	3, 2	4, 2	5, 2	**6, 2**	
3, 3	3, 4	3, 5	**3, 6**		
	4, 3	5, 3	**6, 3**		
4, 4	4, 5	**4, 6**			
	5, 4	**6, 4**			
5, 5	**5, 6**				
	6, 5				
6, 6					

příznivých případů jest 11, tedy dle definice hledaná pravděpodobnost

$$p = \frac{11}{36}.$$

Tím obdrželi jsme jedno řešení. Avšak můžeme též uvažovat takto: Vržená čísla představují jednu z vůbec možných

$$\frac{6 \cdot 7}{2} = 21$$

kombinací bez opakování, totiž

1, 1	1, 2	1, 3	1, 4	1, 5	**1, 6**
2, 2	2, 3	2, 4	2, 5	**2, 6**	
3, 3	3, 4	3, 5	**3, 6**		
4, 4	4, 5	**4, 6**			
5, 5	**5, 6**				
6, 6					

mezi nimiž jest 6 příznivých, z čehož plynula by pravděpodobnost

$$p = \frac{6}{21} = \frac{2}{7}.$$

Proč první způsob jest správný a druhý nikoliv? O tom nás definice nepoučuje.“

Že prvý rozklad jest jedině správný, dokazuje následující úvaha: představme si, že jedna kostka je červená (*Č*) a druhá modrá (*M*) a vytvořme veškeré skupiny s jednotkou

Č	*M*	*Č*	*M*	*Č*	*M*	*Č*	*M*	*Č*	*M*	*Č*	*M*
1	1	1	2	1	3	1	4	1	5	1	6

M	*Č*	*M*	*Č*	*M*	*Č*	*M*	*Č*	*M*	*Č*	*M*	*Č*
1	1	1	2	1	3	1	4	1	5	1	6

Odmyslíme-li si nyní barvy, vidíme, že prvá eventualita

Č	*M*	*M*	*Č*
1	1	1	1

představuje objektivně jedno a totéž, neboť v obou případech má červená kostka číslo 1 a podobně modrá. Pořadí a poloha kostky nemají ale s problémem co činiti. Oproti tomu skýtají složky čísla $3 = 2 + 1$ objektivně dvě rozdílné eventuality

Č	*M*	*Č*	*M*
1	2	2	1

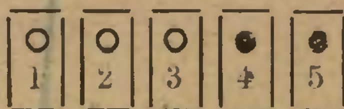
neboť kostka červená jest jednou označena číslem 1 a podruhé číslem 2, stejně jako modrá.

Ne vždy jest však podobná analysa možna. Potom stává se ovšem stanovení mathematické pravděpodobnosti nesnadným problémem, k jehož řešení dospíváme pak nejsnáze experimentem (viz § 4.: Zákon velkých čísel) t. j. vykonáním velkého počtu pokusů.[7]) Z uvedeného vysvítá, že v náležité determinaci pojmu „*stejně možný*“ spočívá celý problém přesné definice počtu pravděpodobnosti. Pojem „*stejně možný*“ = „*stejně pravděpodobný*“ jest totiž silně subjektivně zbarven, poněvadž my to jsme, kteří stejnou možnost ceníme. Uvažovaný problém to jasně ukazuje. Definice mathem. pravděpodobnosti musí ale vzdor tomu, že jest konvencionální, vyzníti objektivně určitě a jasně. To jest však jen

tenkráte možné, když ji vybudujeme výhradně na základě toho, co o zjevu *objektivně víme.* Za tím účelem dlužno především vyhledati veškeré *skutečně rozdílné eventuality* dotyčného zjevu a pak teprve *spočítati příznivé.* Co to značí, hleďme objasniti příkladem.

Určiti jest pravděpodobnost vytažení bílé koule z osudí, v němž nalézají se 3 bílé a 2 černé koule.

Máme 5 koulí, tedy 5 rozdílných výsledků prvého tahu:



představujících nám pět jedině a stejně možných, objektivně přesně vytknutých eventualit. Z těch jsou 3 s bílou a 2 s černou koulí a proto jest pravděpodobnost vytáhnouti bílou (na prvý tah) rovna $\frac{3}{5}$. Tak pojímána neobsahuje mathem. pravděpodobnost nic subjektivního, nýbrž zakládá se výhradně jen na *přesně vymezeném objektivním vědění.*

Chaos v definici počtu pravděpodobnosti povstal tím, že identifikován byl pojem antropomorfní pravděpodobnosti s mathematickou, jež kromě nešťastně voleného jména nemá s prvou nic společného.[8])

Aby svrchu žádaný rozklad byl uskutečnitelný a to v toliko jediný a určitý způsob, musí eventuality vyhovovati určitým postulátům.

Od eventualit žádáme proto, aby byly:

1. *stejně možné,*
2. *vždy možné,*
3. *jedině možné* a
4. *spočitatelně determinované,*

t. j., aby týž soubor příčin a modalit mohl stejně snadno *kdykoli* vyvolati *kteroukoli* eventualitu a kromě nich *žádnou jinou,* a dále, aby ony byly *spočitatelně rozlišitelny* a od sebe *neodvislé.*

Vyhověti uvedeným postulátům není vždy však snadné, takže i největší mathematikové*) nejsou prosti výtek v tomto směru. Ovšem chyby, jež učinili, nejsou obyčejné chyby.

Chceme-li se proto uvarovati nesprávností, musíme zjevy rozložiti v elementárné eventuality, t. j. tak, aby jiný rozklad byl vůbec nemožný. Teprve když takový rozklad jest uskuteč-

---

*) Viz *Czuberovu* kritiku problému tří skřínek, řešeného *Bertrandem* a *Poincaréem* nesprávně; ve spise citovaném na str. 6.

něn, mohou se plně uplatniti vzorce mathematické pravděpodobnosti.

Z toho co uvedeno, plyne zároveň, že mathematická pravděpodobnost, jak my ji pojímáme, založena jest vždy na determinovaném a objektivním vědění, neboť abychom ji mohli vyčísliti, musíme eventuality skutečně sestrojiti a spočítati. V tomto pojetí nemohou výpočty mathem. pravděpodobnosti nic ztratit na ceně ani v tom případě, kdybychom skutečnost mohli přesně předurčiti.

Počet pravděpodobnosti aplikujeme někdy, ovšem ale jen v přenesené působnosti, na prognosy zjevů, jejichž eventuality nejsou uvedeným způsobem spočítatelny a zejména na zjevy, u kterých příčiny jsou jen částečně známy. Podle přesné theorie vypočítané hodnoty pravděpodobností budou pak ovšem jen více méně přiléhavou, ale vždy lepší aproximací, než kdybychom počet pravděpodobnosti vůbec neaplikovali. Tak jako při rozumování o transcendentnu nám nepřístupném užíváme logiky platné vlastně jen pro konkrétno, můžeme mathematické pravděpodobnosti užíti někdy i tam, kde jsou vlastně již překročeny hranice její působnosti.*)

Historicky byl pojem mathem. pravděpodobnosti původně formulován jinak,[9]) a sice t. zv. chancí (mensura sortis).

Představme si hru o jedné výhře v a n losech. Při spravedlivé hře bez zisku bude cena losu

$$s = \frac{v}{n}$$

a poněvadž jest pro všechny losy pravděpodobnost výhry stejná, bude i *naděje výhry čili chance* pro všechny losy táž a hodnota

$$\frac{1}{n} \cdot v = \frac{v}{n}$$

její mírou. Kdyby hráč zakoupil m losů, byla by ovšem i jeho naděje m-kráte větší a sice

$$m\left(\frac{v}{n}\right) = \left(\frac{m}{n}\right) v.$$

*) Viz *Czuber:* Jahresbericht d. D. M. V. 1899. Str. 133. *H. Bruns:* Wahrscheinlichkeitsrechnung und Kollektivmaßlehre 1906. Str. 84.

Ryzí zlomek $\frac{m}{n}$ měří tak chanci výhry. Ta rovná se jistotě, když hráč zakoupí veškeré losy. Bude pak $m = n$ a

$$\frac{m}{n} = 1.$$

Nemá-li hráč žádný los, bude $m = 0$ a tedy

$$\frac{m}{n} = 0.$$

§ 2. Algorithmus symbolu $\dot{(}\;\dot{)}$.

Abychom se mohli v každém případě vyjádřiti co nejurčitěji a nejpřehledněji, zavádíme následující symboliku. Označíme:

1. mathematickou pravděpodobnost objevení se *faktu A* symbolem

$$\dot{(}A\dot{)},$$

při čemž tečkované závorky mají podobný význam jako $\sqrt{}$ (odmocnina) nebo $\int$· (integrál);

2. mathem. pravděpodobnost objevení se *buď faktu A neb faktu B* symbolem

$$\dot{(}A, B\dot{)};$$

3. mathem. pravděpodobnost objevení se *jak faktu A tak i faktu B* symbolem

$$\dot{(}AB\dot{)}$$

(bez čárky mezi A a B);

4. závisí-li pravděpodobnost objevení se *faktu A na existenci faktu B*, označíme pak „*mathem. pravděpodobnost objevení se faktu A za předpokladu existence faktu B*“ symbolem

$$\dot{(}A/B\dot{)}.$$

Pro takto zavedenou symboliku sestavíme si v následujícím *na podkladě vhodně volených příkladů početní algorithmus, který ovšem — poněvadž se jedná o užitou mathematiku — nemůže míti povahu formálných zákonů, nýbrž jest pouze jakýmsi druhem vyšší stenografie, podobně jako symbolika kalkulu logického.*

Algorithmus stanovící pravidla počítání se symbolem $\dot{(}\;\dot{)}$

obsažen jest ve dvou větách: ve *větě o sčítání* a *větě o násobení symbolu* $\dot{(}\ \dot{)}$.

A.) Věta o sčítání symbolu $\dot{(}\ \dot{)}$.

Uvažujme jednoduchý příklad: Vrháme-li kostkou, jest podle definice mathematická pravděpodobnost vrhnouti

číslo 3 rovna $\frac{1}{6}$, tedy $\dot{(}3\dot{)} = \frac{1}{6}$,
číslo 5 rovna $\frac{1}{6}$, tedy $\dot{(}5\dot{)} = \frac{1}{6}$

a pravděpodobnost vrhnouti číslo

buď 3 neb 5 jest rovna $\frac{2}{6}$, tedy $\dot{(}3, 5\dot{)} = \frac{2}{6}$.

Ale poněvadž

$$\frac{2}{6} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6},$$

můžeme *v tomto* případě psáti

$$\dot{(}3, 5\dot{)} = \dot{(}3\dot{)} + \dot{(}5\dot{)}.$$

Aplikujeme-li analogické úvahy na různé podobné zjevy, dospějeme indukcí k závěru, který vyslovíme všeobecnou větou:

$$\dot{(}A, B\dot{)} = \dot{(}A\dot{)} + \dot{(}B\dot{)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (IV.)$$

Rozšíříme-li tyto úvahy na více zjevů A, B, C, ..., obdržíme podobně

$$\dot{(}A\dot{)} + \dot{(}B\dot{)} + \dot{(}C\dot{)} + \ldots = \dot{(}A, B, C, \ldots\dot{)}$$

a naopak

$$\dot{(}A, B, C, \ldots\dot{)} = \dot{(}A\dot{)} + \dot{(}B\dot{)} + \dot{(}C\dot{)} + \ldots\ldots \quad (IV'.)$$

Prvá z posledních vět definuje addiční theorém symbolu $\dot{(}\ \dot{)}$. Druhá věta, formálně se od prvé nelišící, jest základní větou aplikace a lze ji vysloviti takto:

Mathematická pravděpodobnost, že při určitém pokusu objeví se jeden ze vždy a stejně možných zjevů

$$A, B, C, \ldots.$$

a sice buď A neb B neb C ... atd. rovná se součtu mathematických pravděpodobností jednotlivých zjevů o sobě uvažovaných.

B) Věta o násobení symbolu $\dot{(}\ \dot{)}$.

Mějmež dvě osudí, ze kterých jedno ať obsahuje 5 bílých a 3 černé, druhé 4 bílé a 4 černé koule. Vytáhneme z obou po jedné kouli. Jaká je pravděpodobnost, že obě vytažené koule budou bílé?

Počet příznivých případů jest zde 5 × 4, neboť každou bílou kouli z jednoho osudí lze přiřaditi ke každé bílé z druhého osudí. Počet všech možných případů jest 8 × 8, neboť v každém osudí máme po 8 koulích. Označme vytáhnutí bílé koule z prvého osudí písmenou A a z druhého písmenou B, pak jest podle definice math. pravděpodobnosti

$$\dot{(}A\,B\dot{)} = \frac{5 \times 4}{8 \times 8} = \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{8}.$$

Pravděpodobnost vytáhnouti z prvého osudí kouli bílou jest však $\dot{(}A\dot{)} = \frac{5}{8}$ a podobně math. pravděpodobnost vytáhnouti z druhého osudí bílou kouli $\dot{(}B\dot{)} = \frac{4}{8}$. Bude proto

$$\dot{(}AB\dot{)} = \dot{(}A\dot{)} \cdot \dot{(}B\dot{)}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(V.)}$$

Tato věta platí jen za předpokladu vzájemné nezávislosti obou jevů.

Později (viz str. 17) dokážeme, že podmínkou toho jest existence rovnice

$$\dot{(}A\,B\dot{)}\ \dot{(}non\ A\ \ non\ B\dot{)} = \dot{(}A\ \ non\ B\dot{)}\ \dot{(}non\ A\ B\dot{)}.$$

Všeobecně lze psáti:

$$\dot{(}ABC\ \ldots\dot{)} = \dot{(}A\dot{)}\ \dot{(}B\dot{)}\ \dot{(}C\dot{)}. \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(V'.)}$$

Věta ta určuje tak zvaný *multiplikační theorém symbolu* $\dot{(}\ \dot{)}$ a slovně zní takto:

Mathem. pravděpodobnost, že jak A tak B i C .... čili jinak řečeno: že A, B, C, ... se zároveň vyskytnou, rovná se součinu všech jednotlivých uvažovaných pravděpodobností.

Z věty (V.) plyne pro $A = B = C = \ldots$

$$\dot{(}A^{(n)}\dot{)} = \dot{(}A\dot{)}^{n}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(VI.)}$$

čili vyjádřeno slovy: *Pravděpodobnost vyskytnutí se v n dějích faktu A, n-kráte po sobě, rovná se n-té mocnině jednoduché pravděpodobnosti faktu A.*

Symbol $A^{(n)}$ čte se „*A opakováno n-kráte*", neboť povstal z rovnice (V') tím, že položeno $B = C = \ldots = A$.

Na př. Pravděpodobnost vrhu čísla 3 kostkou šestibokou rovná se $\frac{1}{6}$. Pravděpodobnost vrhnouti číslo 3 dvakráte za sebou jest rovna $(\frac{1}{6})^2 = \frac{1}{36}$ atd.

C) Závislé pravděpodobnosti.

Veškeré předcházející věty platí pro *úplně na sobě nezávislé* pravděpodobnosti. Často se však stává, že pravděpodobnosti vykazují mezi sebou určité závislosti, takže vyskytnutí se faktu A má určitý vliv na pravděpodobnost druhého faktu B. Potom mluvíme *o závislých pravděpodobnostech*. Závislost jedné pravděpodobnosti na druhé uplatní se zejména tenkráte, když na př. po vyskytnutí se faktu A se ptáme po pravděpodobnosti jiného s ním souvisejícího faktu B. Abychom uvedli drastický příklad, představme si, že existence faktu A vylučuje existenci faktu B. Stal-li se fakt A skutkem, potom pravděpodobnost faktu B bude očividně rovna nule. To označíme symbolicky

$$(\overline{AB}) = (B/A) = 0,$$

kdež čárka nad AB v symbolu $(\overline{AB})$ značí závislé pravděpodobnosti. Naopak, kdyby existence faktu B byla vždy vázána na existenci faktu A, pak po vyskytnutí se faktu A platila by rovnice

$$(\overline{AB}) = (B/A) = 1.$$

Jest-li závislost B na A spočitatelně určena, nebude nesnadné stanoviti i numerickou hodnotu symbolu závislé pravděpodobnosti. K jejímu odvození užijeme opětně konkrétního příkladu.

V osudí nechť jest:

a_1 *bílých koulí znamenaných číslem 1,*
a_2 *bílých koulí znamenaných číslem 2,*
b_1 *černých koulí znamenaných číslem 1* a
b_2 *černých koulí znamenaných číslem 2.*

Jaká jest pravděpodobnost $(\overline{AB})$ *vytáhnouti kouli bílou znamenanou číslem 1*? Podle definice jest očividně

$$(\overline{AB}) = \frac{a_1}{a_1 + a_2 + b_1 + b_2},$$

dále pravděpodobnost vytáhnouti bílou bez ohledu na očíslování

$$(A) = \frac{a_1 + a_2}{a_1 + a_2 + b_1 + b_2}$$

a konečně pravděpodobnost vytáhnouti z bílých koulí (fakt A) kouli znamenanou číslem 1 (fakt B)

$$(B/A) = \frac{a_1}{a_1 + a_2}.$$

Poněvadž jest identicky

$$\frac{a_1}{a_1 + a_2 + b_1 + b_2} = \frac{a_1 + a_2}{a_1 + a_2 + b_1 + b_2} \cdot \frac{a_1}{a_1 + a_2},$$

bude i

$$\dot{(}\overline{AB}\dot{)} = \dot{(}A\dot{)}\,\dot{(}{}^{B}/A\dot{)}. \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(VII.)}$$

Větu tu lze vysloviti takto:

Mathem. pravděpodobnost objevení se faktu A i B zároveň, rovná se při závislých pravděpodobnostech součinu z pravděpodobnosti faktu A a dále pravděpodobnosti faktu B, kteroužto poslední nutno však vypočítati za předpokladu objevení se faktu A.

Od dvou zjevů A,B snadno přejdeme ke třem A,B,C následujícím postupem: položíme-li v rovnici (VII.) na místo A dvojici AB a na místo B nový fakt C, jest:

$$\dot{(}\overline{ABC}\dot{)} = \dot{(}\overline{AB}\dot{)}\,\dot{(}{}^{C}/AB\dot{)}$$

a poněvadž

$$\dot{(}\overline{AB}\dot{)} = \dot{(}A\dot{)}\,\dot{(}{}^{B}/A\dot{)},$$

jest konečně

$$\dot{(}\overline{ABC}\dot{)} = \dot{(}A\dot{)}\,\dot{(}{}^{B}/A\dot{)}\,\dot{(}{}^{C}/AB\dot{)}.$$

Všeobecně lze psáti:

$$\dot{(}\overline{ABCD}\ldots\dot{)} = \dot{(}A\dot{)}\,\dot{(}{}^{B}/A\dot{)}\,\dot{(}{}^{C}/AB\dot{)}\,\dot{(}{}^{D}/ABC\dot{)}\ldots \quad \text{(VIII.)}$$

Příklad:

V osudí nechť jest a bílých koulí a b černých koulí. Jaká jest pravděpodobnost vytáhnouti v třech po sobě jdoucích tazích napřed: 2 bílé a potom jednu černou, když vytažené koule nevkládáme zpět do osudí?

Budiž $a + b = n$; máme následující akty:

1. vytáhnouti bílou kouli o pravděpodobnosti $\dot{(}A\dot{)} = \frac{a}{n}$,

2. vytáhnouti bílou, když již bílá koule byla vytažena, o pravděpodobnosti $\dot{(}{}^{B}/A\dot{)} = \frac{a-1}{n-1}$,

3. vytáhnouti černou za předpokladu aktů 1. a 2. o pravděpodobnosti $\dot{(}{}^{C}/AB\dot{)} = \frac{b}{n-2}$;

počítáme-li podle vzorce výše uvedeného, obdržíme

$$\dot{(}ABC\dot{)} = \dot{(}A\dot{)}\,\dot{(}{}^{B}/{}_{A}\dot{)}\,\dot{(}{}^{C}/{}_{AB}\dot{)} = \frac{a}{n} \cdot \frac{a-1}{n-1} \cdot \frac{b}{n-2} \cdot$$

Předcházející úvahy doplníme ještě takto: *)
Předpokládejme, že v jistém problému

v a případech vyskytne se A a B,
v b „ „ „ A a *non* B,
v c „ „ „ *non* A a B,
v d „ „ „ *non* A a *non* B,

pak jest výraz $(a + b + c + d)$ počtem možných případů a platí podle definice

$$\dot{(}A\dot{)} = \frac{a+b}{a+b+c+d},$$

$$\dot{(}B\dot{)} = \frac{a+c}{a+b+c+d},$$

$$\dot{(}A, B\dot{)} = \frac{a+b+c}{a+b+c+d},$$

$$\dot{(}AB\dot{)} = \frac{a}{a+b+c+d},$$

$$\dot{(}{}^{A}/{}_{B}\dot{)} = \frac{a}{a+c},$$

$$\dot{(}{}^{A}/{}_{non\ B}\dot{)} = \frac{b}{b+d},$$

$$\dot{(}{}^{B}/{}_{A}\dot{)} = \frac{a}{a+b},$$

$$\dot{(}B/non\ A\dot{)} = \frac{c}{c+d}.$$

Uvažujme nyní následující zvláštní případy:
1. Nemůže-li se A s B vyskytnouti zároveň, jest zajisté

$$a = 0$$

a tedy

$$\dot{(}A\dot{)} = \frac{b}{b+c+d},$$

$$\dot{(}B\dot{)} = \frac{c}{b+c+d},$$

*) *Poincaré:* Calcul des probabilités, Paříž 1896. str. 12.

$$\dot{(}A, B\dot{)} = \frac{b + c}{b + c + d},$$

pročež

$$\dot{(}A, B\dot{)} = \dot{(}A\dot{)} + \dot{(}B\dot{)}$$

a to jest věta (IV.)

2. A a B jsou od sebe neodvislé, když existence neb neexistence faktu B nemá na existenci faktu A žádný vliv, takže jest

$$\dot{(}{}^{A}/B\dot{)} = \dot{(}{}^{A}/non\ B\dot{)},$$

čili

$$\frac{a}{a + c} = \frac{b}{b + d},$$

což lze též psáti:

$$\frac{1}{1 + \frac{c}{a}} = \frac{1}{1 + \frac{d}{b}}.$$

To jest obecně jen tehdy možno, když

$$\frac{c}{a} = \frac{d}{b};$$

pak bude však také vždy

$$\dot{(}B/A\dot{)} = \dot{(}B/non\ A\dot{)}.$$

Za těchto předpokladů jest dále

$$\dot{(}A\dot{)}\ \dot{(}B\dot{)} = \frac{(a + b)(a + c)}{(a + b + c + d)^2} = \frac{a^2 + (b + c)\,a + b\,c}{(a + b + c + d)^2} =$$

$$= \frac{a^2 + (b + c)\,a + a\,d}{(a + b + c + d)^2} = \frac{a}{a + b + c + d} = \dot{(}AB\dot{)}.$$

Věta:

$$\dot{(}AB\dot{)} = \dot{(}A\dot{)}\ \dot{(}B\dot{)}$$

jest proto podmíněna nezávislostí A na B, to značí: rovnicí

$$ad = bc,$$

již lze psáti i takto:

$$\dot{(}A\ B\dot{)}\ \dot{(}\boldsymbol{non}\ A\ \boldsymbol{non}\ B\dot{)} = \dot{(}A\ \boldsymbol{non}\ B\dot{)}\ \dot{(}\boldsymbol{non}\ A\ B\dot{)}.$$

Tím dokázána jest i dříve již uvedená podmíněčná rovnice.

Konečně jest

$$\dot{(}AB\dot{)} = \dot{(}A\dot{)}\ \dot{(}B/A\dot{)} = \dot{(}B\dot{)}\ \dot{(}A/B\dot{)},$$

ovšem jen pokud A i B jsou od sebe neodvislé; jinak jest

$$\dot{(}A\dot{)}\,\dot{(}B/A\dot{)} \gtrless \dot{(}B\dot{)}\,\dot{(}A/B\dot{)}.$$

Příklad.

V osudí budiž (a + 1) *bílých* a b *černých, celkem* n *koulí číslovaných takto: od* 1 *do* (a + 1) *bílé a od* (a + 2) *do* n *černé. Jest vypočísti mathematickou pravděpodobnost, že vytáhneme kouli bílou, označenou číslem sudým*; n buď sudé, stejně a.

Počet bílých koulí znamenaných sudým číslem jest $\frac{a}{2}$. Pravděpodobnost vytáhnouti bílou kouli označenou sudým číslem rovná se součinu z pravděpodobnosti vytáhnouti bílou kouli t. j.

$$\frac{a+1}{n}$$

s pravděpodobností vytáhnouti kouli se sudým číslem, t. j.

$$\frac{1}{2},$$

Hledaná pravděpodobnost P jest proto

$$P = \frac{1}{2}\,\frac{a+1}{n} = \dot{(}A\,B\dot{)} = \dot{(}A\dot{)}\,\dot{(}B\dot{)}$$

Pravděpodobnost tu můžeme ale vyčísliti přímo z definice: jest $\frac{a}{2}$ bílých koulí znamenaných sudým číslem mezi n koulemi, čímž obdržíme

$$P = \frac{a}{2\,n} = \frac{a+1}{n} \cdot \frac{\frac{a}{2}}{a+1} = \dot{(}\overline{A, B}\dot{)} = \dot{(}A\dot{)}\,\dot{(}B/A\dot{)}.$$

Výsledky se liší. Poslední rovnice plyne přímo z definice, musí býti proto správná. Prvá je nesprávnou zjevy nejsou od sebe nezávislé, neboť zda ta neb ona koule obdrží sudé neb liché číslo, to závisí na počtu koulí n. V uvažovaném případě není vyhověno podmínce

$$\dot{(}A\,B\dot{)}\,\dot{(}\text{non } A \text{ non } B\dot{)} = \dot{(}A \text{ non } B\dot{)}\,\dot{(}\text{non } A\,B\dot{)},$$

o čemž se nejnázorněji přesvědčíme příkladem pro $a = 4$, $b = 3$

○	○	○	○	○	●	●	●
1	2	3	4	5	6	7	8

z kterého plyne

$$(A\ B)\ (non\ A\ non\ B) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8} < \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{4} = (A\ non\ B)\ (non\ A\ B).$$

Za to příklad $a = 6$, $b = 2$, vyhovuje podmínce a dává proto stejné pravděpodobnosti.

§ 3. Příklady.

Příklad 1.

Mathem. pravděpodobnost, že při vrhu kostky *nepadne* určité číslo na př. 6, jest

$$q = (non\ 6) = \tfrac{5}{6} = 0{,}83$$

a že zjev nenastane ~~při druhém, třetím, atd.~~ jest

$$q^2 = 0{\cdot}69, \quad q^3 = 0{\cdot}58, \quad q^4 = 0{\cdot}48, \ldots$$

Z toho soudíme, že lze s pravděpodobností $\frac{1}{2}$ očekávati, že určité číslo (na př. 6) se během čtyř tahů objeví. Hra 1 : 1 na čtyři po sobě jdoucí tahy jest v důsledku toho spravedlivou hrou.

Příklad 2.

Podle mnoholetých pozorování jest pravděpodobnost meteorologických prognos pro teplotu p_1, oblačnost p_2 a větry p_3 okrouhle 80%, pro srážky p_4 jen 66%. Má se určiti pravděpodobnost, že určitá předpověď se pro všechny čtyři elementy splní. Zde máme

$$p_1 = p_2 = p_3 = \frac{80}{100} = \frac{4}{5}, \quad p_4 = \frac{66}{100} \doteq \frac{2}{3};$$

složená pravděpodobnost jest proto

$$p_1\, p_2\, p_3\, p_4 = \left(\frac{4}{5}\right)^3 \cdot \frac{2}{3} = \frac{128}{375} \doteq \frac{1}{3}.$$

Theoreticky tedy velmi malá; není to však dokladem známého vtipu, že „meteorologické prognosy jsou proroctvím, které se zpravidla nevyplní", neboť počet pravděpodobnosti není zde jednoduše applikabilis. Pravděpodobnosti p_1, p_2, p_3, p_4 nejsou totiž na sobě nezávislé, jak to algorithmus počtu pravděpodobnosti žádá, aby mohl býti aplikován, teplota souvisí na př. s oblačností atd.

Příklad 3.

Jaká jest pravděpodobnost, že určité číslo na př. 7 v 90-tičíselné loterii vyjde v první, druhé, třetí, čtvrté, páté „kouli“ (t. j. jako 1, 2, 3, 4, 5-té v tahu). Podle definice jest:

$$\ddot{(7)}_1 = \frac{1}{90}, \quad \ddot{(7)}_4 = \frac{1}{87},$$

$$\ddot{(7)}_2 = \frac{1}{89}, \quad \ddot{(7)}_5 = \frac{1}{86}.$$

$$\ddot{(7)}_3 = \frac{1}{88},$$

Z čehož však nesmíme odvoditi, že by byla pravděpodobnost vyjití č. 7 v libovolné kouli

$$\ddot{(7)} = \frac{1}{90} + \frac{1}{89} + \frac{1}{88} + \frac{1}{87} + \frac{1}{86} = 0{\cdot}056\ldots,$$

neboť na př. $\ddot{(7)}_2$ bude rovno $\frac{1}{89}$ jen tehdy, když 7 v prvé kouli nebylo taženo. Před tahem jest to jenom hypothesa s pravděpodobností $\frac{89}{90} = 1 - \frac{1}{90}$. Také $\ddot{(7)}_3$ bude se rovnati $\frac{1}{88}$ jen tehdy, víme li, že 7 ani v prvé ani v druhé kouli nebylo taženo. Správně jest proto podle theorému multiplikačního

$$\ddot{(7)}_2 = \frac{89}{90} \cdot \frac{1}{89} = \frac{1}{90},$$

neboť $\ddot{(7)}_2$ skládá se ze dvou pravděpodobností:

a) 7 nebude taženo v kouli první,

b) z pravděpodobnosti vytáhnouti „7“ z 89 čísel; stejnou úvahou obdržíme

$$\ddot{(7)}_3 = \frac{89}{90} \cdot \frac{88}{89} \cdot \frac{1}{88} = \frac{1}{90}, \text{ atd.}$$

a tudíž

$$\ddot{(7)} = \frac{1}{90} + \frac{1}{90} + \frac{1}{90} + \frac{1}{90} + \frac{1}{90} = \frac{1}{18} = 0{\cdot}055\ldots$$

Příklad 4.

Jaká jest pravděpodobnost dvěma kostkami I., II. vrhnouti určitý počet ok.

Počet všech možných vrhů jest 6 . 6 = 36, neboť každé číslo jedné kostky může se objeviti s každým číslem kostky druhé. Počet příznivých případů podává následující sestavení:

	I., II.	I., II.	I., II.	I., II.	I., II.	I., II.	I., II.	
2	1 + 1							1
3	1 + 2	2 + 1						2
4	1 + 3	2 + 2	3 + 1					3
5	1 + 4	2 + 3	3 + 2	4 + 1				4
6	1 + 5	2 + 4	3 + 3	4 + 2	5 + 1			5
7	1 + 6	2 + 5	3 + 4	4 + 3	5 + 2	6 + 1		6
8	2 + 6	3 + 5	4 + 4	5 + 3	6 + 2			5
9	3 + 6	4 + 5	5 + 4	6 + 3				4
10	4 + 6	5 + 5	6 + 4					3
11	5 + 6	6 + 5						2
12	6 + 6							1

Jest proto na př.

$$(\dot{1}\dot{1}) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}.$$

Příklad jest zajímavý tím, že Leibniz*) klade $(\dot{1}\dot{1}) = \frac{1}{36}$ považoval totiž oba součty 5 + 6 a 6 + 5 za totožné. Jak. Ber-

*) Dissertacio de arte combinatoria 1666.

noulli poznamenává, že čísla všech možných případů lze představiti koefficienty rozvoje:

$$(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^2 =$$
$$x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 4x^5 + 5x^6 + 6x^7 + 5x^8 + 4x^9 + 3x^{10} + 2x^{11} + x^{12}.$$

Podle této poznámky lze problém snadno řešiti i pro více kostek. Pro tři kostky obdržíme

$$(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^3 =$$
$$x^3 + 3x^4 + 6x^5 + 10x^6 + 15x^7 + 21x^8 + 25x^9 + 27x^{10} +$$
$$+ 27x^{11} + 25x^{12} + 21x^{13} + 15x^{14} + 10x^{15} + 6x^{16} + 3x^{17} + x^{18}$$

a z toho na př.

$$\dot{(9)} = \dot{(12)} = \frac{25}{6 \times 6 \times 6} = \frac{25}{216}.$$

Příklad třech kostek jest historicky zajímavý tím, že jest jedním z prvých historicky známých problémů počtu pravděpodobnosti. Jistý hráč pozoroval totiž, že při hře třemi kostkami častěji 11 padá než 12, 10 než 9 a prosil *Galileiho* o vysvětlení, jež mu i zcela správně bylo dáno. Nejnižší čísla 3 a 18, která při uvedené hře jsou vůbec možna, nazývají se v komentáři k *Dantea* *„Divina Comedia“* z r. 1477 *„azari“* podle arabského *„asar“* t. j. těžký, ze kterého povstalo asi francouzské slovo *„hasard“*.

Příklad 5.

Mějmež dvě A a B osudí, v prvém ať jsou 3 bílé a 4 černé, v druhém 4 bílé a 3 černé. Z jednoho, kteréhokoliv, vytáhneme kouli; jaká jest mathem. pravděpodobnost, že vytáhneme bílou?

Zde by se zdálo, že by bylo možné usuzování následující. Mathematická pravděpodobnost vytáhnouti z prvního osudí bílou kouli jest $^3/_7$, z druhého $^4/_7$ a poněvadž buď z jednoho nebo druhého kouli vytáhneme, možno psáti:

$$\dot{(O)} = \dot{(A)} + \dot{(B)} = \frac{3}{7} + \frac{4}{7} = 1\,(!),$$

což jest evidentně nesprávné. Podle zdravého rozumu bychom totiž očekávali vzhledem k stejnému počtu bílých a černých koulí v obou nádobách

$$\dot{(O)} = \frac{1}{2}.$$

Přesnější analysa faktu to i dotvrzuje. Akt vytažení bílé koule C není zde jednoduchým aktem, nýbrž skládá se ze dvou

α) *volby nádoby,* buď A neb B s pravděpodobností

$$\dot{(}A\dot{)} = \dot{(}B\dot{)} = \frac{1}{2},$$

β) *tahu bílé koule po volbě nádoby,* t. j.

$$\text{buď } \dot{(}C/A\dot{)} = \frac{3}{7} \quad \text{aneb} \quad \dot{(}C/B\dot{)} = \frac{4}{7}.$$

Mathem. pravděpodobnost vytáhnutí bílé z osudí A jest proto

$$\dot{(}A\dot{)}\,\dot{(}C/A\dot{)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{7} \quad \text{a z osudí } B \ldots.\ \dot{(}B\dot{)}\,\dot{(}C/B\dot{)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{7}$$

a poněvadž buď jedno neb druhé musí nastati, jest i

$$\dot{(}C\dot{)} = \dot{(}A\dot{)}\,\dot{(}C/A\dot{)} + \dot{(}B\dot{)}\,\dot{(}C/B\dot{)} = \frac{1}{2}.$$

Projednejme týž příklad za málo změněných okolností.

Příklad 6.

Osudí rozděleno jest stěnou ve dva díly A a B. V jednom jest a_1 bílých a b_1 černých koulí, v druhém a_2 bílých a b_2 černých.

Pravděpodobnost vytáhnouti bílou jest podle předešlého příkladu

$$\dot{(}a\dot{)} = \frac{1}{2}\left\{\frac{a_1}{a_1+b_1} + \frac{a_2}{a_2+b_2}\right\}.$$

Zrušíme-li stěnu, bude v osudí $a_1 + a_2$ bílých koulí a pravděpodobnost vytáhnouti kouli bílou jest proto potom

$$\dot{(}a'\dot{)} = \frac{a_1 + a_2}{a_1 + a_2 + b_1 + b_2}.$$

Vyhledejme nyní rozdíl, obdržíme

$$\dot{(}a'\dot{)} - \dot{(}a\dot{)} = \frac{[\overline{a_1+b_1} - \overline{a_2+b_2}]\,[a_1 b_2 - a_2 b_1]}{2\,[a_1+b_1]\,[a_2+b_2]\,[a_1+a_2+b_1+b_2]}.$$

Jmenovatel jest vždy kladný, čitatel jest buď kladný neb záporný podle toho, jsou-li činitelé $[\overline{a_1+b_1} - \overline{a_2+b_2}]$ a $[a_1 b_2 - a_2 b_1]$ stejného znamení neb ne, a rovný nule pro $a_1 + b_1 = a_2 + b_2$ nebo $a_1 b_2 - b_1 a_2 = 0$.

V případě rovnosti, t. j. když v obou oddílech jest stejný počet koulí, jest stěna bez významu, což jest ostatně evidentní, jinak však nikoliv. Jsou tudíž výsledky počtu pravděpodobnosti ve shodě s logickým rozumováním.

Oba předešlé příklady jsou ilustrací kombinovaného vzorce, který symbolicky označme takto

$$\dot{(}C\dot{)} = \dot{(}A\dot{)}\,\dot{(}C/A\dot{)} + \dot{(}B\dot{)}\,\dot{(}C/B\dot{)},$$

kdež

$\dot{(}C\dot{)}$ značí mathem. pravděpodobnost vytáhnouti kouli bílou,

$\dot{(}A\dot{)}$, $\dot{(}B\dot{)}$ značí mathem. pravděpodobnost volby osudí A, B,

$\dot{(}C/A\dot{)}$ značí mathem. pravděpodobnost vytáhnouti bílou kouli po volbě osudí A a podobně $\dot{(}C/B\dot{)}$.

Ještě složitější jest následující příklad.

Příklad 7.

Mějme dvě osudí I., II. obsahující bílé v počtu a, a' *a černé koule v počtu* b, b'. *Vytáhneme z jednoho kouli a vložíme ji, aniž bychom se na ni podívali, do osudí druhého. Jaká jest pravděpodobnost vytáhnouti nyní z druhého kouli bílou.*

Po vytažení prvé koule a jejím vložení do druhého osudí máme následující eventuality.

	Stav po vložení vytáhnuté koule do druhého osudí	Pravděpodobnost vytažení bílé koule
1	Bílá koule vytažena z I. a vložena do II. I. $a-1, b$ — II. $a'+1, b'$	$(o)_1 = \frac{1}{2}\cdot\frac{a}{a+b}\cdot\frac{a'+1}{a'+b'+1}$
2	Černá koule vytažena z I. a vložena do II. I. $a, b-1$ — II. $a', b'+1$	$(o)_2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{b}{a+b}\cdot\frac{a'}{a'+b'+1}$
3	Bílá koule vytažena z II. a vložena do I. I. $a+1, b$ — II. $a'-1, b$	$(o)_3 = \frac{1}{2}\cdot\frac{a'}{a'+b'}\cdot\frac{a+1}{a+b+1}$
4	Černá koule vytažena z II. a vložena do I. I. $a, b+1$ — II. $a', b'-1$	$(o)_4 = \frac{1}{2}\cdot\frac{b'}{a'+b'}\cdot\frac{a}{a+b+1}$

Zde zjev jest v prvém případě tento:

$\frac{1}{2}$ . . . . pravděpodobnost volby osudí . . . . . akt A,

$\frac{a}{a+b}$ . . . . pravděpodobnost vytáhnouti bílou kouli ze zvoleného osudí . . . . akt B,

$\frac{a'+1}{a'+b'+1}$ . . . pravděpodobnost vytáhnouti bílou kouli po vložení koule do druhého osudí . . . . akt C.

Tudíž mathem. pravděpodobnost pro eventualitu 1

$$\dot{(\circ)}_1 = \dot{(\overline{ABC})} = \dot{(A)}\,\dot{(B/A)}\,\dot{(C/AB)},$$

tedy

$$\dot{(\circ)}_1 = \frac{1}{2}\cdot\frac{a}{a+b}\cdot\frac{a'+1}{a'+b'+1} \text{ atd.}$$

Poněvadž všechny čtyři eventuality jsou stejně možné a jedna z nich a to buď 1. neb 2. neb 3. neb 4. musí nastati, jest hledaná pravděpodobnost

$$\dot{(\circ)} = \dot{(\circ)}_1 + \dot{(\circ)}_2 + \dot{(\circ)}_3 + \dot{(\circ)}_4.$$

Příklad 8.

V osudí je ***a*** *bílých a* ***b*** *černých koulí; jak velká jest pravděpodobnost, že ve třech tazích vytažena bude koule bílá, když vytažené koule neklademe zpět do osudí.*

Eventuality analysujeme následujícím grafikonem (obr. 1.): Vycházejíce od bodu O vždy jen od levé k pravé, dospíváme k bodům $A\,B\,C\,D$ různými možnými cestami. Tím vypočteny jsou všechny možné eventuality pro $n=3$, které snadno rozšířením grafikonu zevšeobecníme pro případ $n=4$, atd. Pro $n=3$ máme celkem $2^3=8$ eventualit (všeobecně 2^n eventualit), jichž počet lze analyticky obdržeti i roznásobením symbolu

$$(\circ+\bullet)(\circ+\bullet)(\circ+\bullet) =$$
$$\circ\circ\circ + \circ\circ\bullet + \circ\bullet\circ + \bullet\circ\circ + \circ\bullet\bullet + \bullet\circ\bullet + \bullet\bullet\circ + \bullet\bullet\bullet.$$

Pravděpodobnosti jednotlivých případů při označení $a+b=s$ jsou následující

$$(\dot{P}_1) = \frac{a}{s} \cdot \frac{a-1}{s-1} \cdot \frac{a-2}{s-2}, \qquad (\dot{P}_5) = \frac{a}{s} \cdot \frac{b}{s-1} \cdot \frac{b-1}{s-2},$$

$$(\dot{P}_2) = \frac{a}{s} \cdot \frac{a-1}{s-1} \cdot \frac{b}{s-2}, \qquad (\dot{P}_6) = \frac{b}{s} \cdot \frac{a}{s-1} \cdot \frac{b-1}{s-2},$$

$$(\dot{P}_3) = \frac{a}{s} \cdot \frac{b}{s-1} \cdot \frac{a-1}{s-2}, \qquad (\dot{P}_7) = \frac{b}{s} \cdot \frac{b-1}{s-1} \cdot \frac{a}{s-2},$$

$$(\dot{P}_4) = \frac{b}{s} \cdot \frac{a}{s-1} \cdot \frac{a-1}{s-2}, \qquad (\dot{P}_8) = \frac{b}{s} \cdot \frac{b-1}{s-1} \cdot \frac{b-2}{s-2}.$$

Při tom značí P_1, že se jedná o vytáhnutí tří bílých koulí, tedy prvý případ shora dolů na obr. 1. Podobně P_2 druhý případ (dvě bílé po sobě a na konec černou) atd.

Pravděpodobnost vytáhnouti jednou bílou kouli během tří tahů jest

$$(\dot{P}_{1,3}) = (\dot{P}_5) + (\dot{P}_6) + (\dot{P}_7) = 3\,(\dot{P}_5) = 3\,(\dot{P}_6) = 3\,(\dot{P}_7),$$

pravděpodobnost vytáhnouti dvě bílé koule během tří tahů jest

$$(\dot{P}_{2,3}) = (\dot{P}_2) + (\dot{P}_3) + (\dot{P}_4) = 3\,(\dot{P}_2) = 3\,(\dot{P}_3) = 3\,(\dot{P}_4)$$

a konečně pravděpodobnost vytáhnouti tři bílé koule

$$(\dot{P}_{3,3}) = (\dot{P}_1).$$

Výpočty, jak vidno, stávají se brzy složitými. Všeobecný problém lze formulovati následovně:

Zjev A lze v s po sobě následujících pokusech očekávati s pravděpodobnostmi $p_1, p_2, \ldots\ldots p_s$; zjev *non A* s pravděpodobnostmi $q_1, q_2, \ldots\ldots q_s$, kde

$$p_i + q_i = 1, \quad i = 1, 2, \ldots s.$$

Jest vyšetřiti pravděpodobnost $(A)_a$, *že zjev A se v s pokusech objeví a-kráte.*

Podle analogie předešlého případu vytvoříme si výrazem

$$(p_1 + q_1)(p_2 + q_2) \ldots\ldots (p_s + q_s)$$

všechny možné kombinace

$$p_1 p_2 \ldots p_a q_{a+1} q_{a+2} \ldots q_s$$

vyskytnutí se zjevu A celkem a-kráte během s pokusů.

Takových členů máme celkem

$$\binom{s}{a} = \frac{s(s-1)\ldots\ldots(s-a+1)}{a(a-1)\ldots\ldots 2 \,.\, 1}.$$

Jich součet jest hledanou pravděpodobností pro vyskytnutí se zjevu A celkem a-kráte, t. j. ne více a ne méně než a-kráte v s pokusech.

Jinak lze řešiti uvedený problém následujícím způsobem: Rozviňme součin

$$(p_1 \lambda + q_1)(p_2 \lambda + q_2) \ldots\ldots (p_s \lambda + q_s)$$

v řadu mocninovou podle λ, potom obdržíme

$$(A)_0 + \lambda (A)_1 + \lambda^2 (A)_2 + \ldots\ldots + \lambda^a (A)_a + \ldots + \lambda^s (A)_s,$$

kde koefficient u λ^a, t. j. $(A)_a$ jest hledanou pravděpodobností.

Poznámka.

Součin

$$(p_1 \lambda + q_1)(p_2 \lambda + q_2) \ldots\ldots (p_s \lambda + q_s)$$

nazývá se podle *Laplacea* vytvořující funkcí (Erzeugende Funktion, fonction génératrice).

Příklad 9.

Při obyčejné hře v karty o 32 kartách dobře promíchaných vytažena byla n-krát po sobě karta. Jaká jest pravděpodobnost, že to byla vždy figura v případě

a) když karta vytažená byla opět vložena mezi ostatní,

b) když karta vytažená byla odložena?

Rozumí se, že třeba karty před každým tahem náležitě promíchati, aby udržen byl týž status quo před každým novým pokusem.

Uvažujme nejprve případ *a*). Ve hře jest 32 karet a mezi nimi 12 figur, proto jest

$$(\dot{\text{fi}}\dot{\text{g}}.) = \frac{12}{32} = \frac{3}{8}$$

a pravděpodobnost vytáhnouti při n-tazích vždy figuru je rovna

$$\left(\frac{3}{8}\right)^n.$$

Přistupme nyní k případu *b*). Poněvadž zde se modality mění, je mathematická pravděpodobnost vytáhnouti figuru při prvém tahu

$$(\dot{1}) = \frac{12}{32},$$

při druhém

$$(\dot{\dot{2}}) = \frac{11}{31} \text{ atd.,}$$

tudíž na př. pravděpodobnost vytáhnouti 3 figury po sobě je rovna

$$\frac{12}{32} \cdot \frac{11}{31} \cdot \frac{10}{30} \cdot$$

Názorný přehled podává grafikon (obr. 2).

Pravděpodobnosti odpovídající jednotlivým bodům jsou

$$\frac{12}{32} \cdot \frac{11}{31} \cdot \frac{10}{30} \ldots\ldots\ldots C$$

$$\frac{12}{32} \cdot \frac{11}{31} \cdot \frac{20}{30} \ldots\ldots\ldots C'$$

$$\frac{12}{32} \cdot \frac{20}{31} \cdot \frac{11}{30} \ldots\ldots\ldots C''$$

$$\frac{12}{32} \cdot \frac{20}{31} \cdot \frac{19}{30} \ldots\ldots\ldots C'''$$

$$\frac{20}{32} \cdot \frac{12}{31} \cdot \frac{11}{30} \ldots\ldots\ldots C^{IV}$$

$$\frac{20}{32} \cdot \frac{12}{31} \cdot \frac{19}{30} \ldots\ldots\ldots C^{V}$$

$$\frac{20}{32} \cdot \frac{19}{31} \cdot \frac{12}{30} \ldots\ldots\ldots C^{VI}$$

$$\frac{20}{32} \cdot \frac{19}{31} \cdot \frac{18}{30} \ldots\ldots\ldots C^{VII}.$$

Čísla 32, 31, 30, 29 značí počet karet, pomocí kterého lze snadno a rychle vyhledati pravděpodobnost nějakého zjevu. Na př. k bodu C''' dojdeme z bodu O cestou přes A, B'; v bodě A máme 31, v B 30 a v bodě C 29 karet. Bod A značí vytažení figury, na příčce $\overline{OA}$ značí číslo 12 počet figur před faktem A a na svislých úsečkách čísla 32, 31, 30, 29 značí počet karet vůbec. Příslušný zlomek k bodu A jest $\frac{12}{32}$, k bodu B' $\frac{20}{31}$ a zlomek k bodu C' podobně $\frac{19}{30}$. Násobením všech hodnot zlomků příslušných ke všem bodům, přes které dospíváme z bodu O do bodu C''', obdržíme pravděpodobnost vytáhnutí po prvé figury a v obou následujících jiné karty než figury. Z grafikonu plyne

bezprostředně, že lze body B' a B'' identifikovati, čímž obdržíme schema, které uvádíme ihned všeobecně:

Z bodu O do bodu A nebo D vede pouze jedna cesta a to: $p_1 p_2 p_3$ resp. $q_1 q_2 q_3$; k bodům B a C vedou celkem tři cesty a tak na př. k bodu B (jak je na obr. 3. naznačeno) lze dospěti takto:

$$p_1 p_2 q_3, \; p_1 q_2 p_3 \text{ a } q_1 p_2 p_3.$$

Platí proto úměra

$$(\dot{A}) : (\dot{B}) : (\dot{C}) : (\dot{D}) = 1 : 3 : 3 : 1.$$

Rozšíříme-li schema, přesvědčíme se, že pro jednotlivé koncové body počet možných cest dán jest koefficienty rozvoje

$$(1 + 1)^4 = 1 + 4 + 6 + 4 + 1$$

a všeobecně rozvoje

$$(1 + 1)^n.$$

Uvažovaný grafikon, jenž jest zároveň grafikonem věty Bernoulliho, o které bude jednáno v následujícím odstavci, vysvětluje s hlediska počtu pravděpodobnosti výkonnost tak zvaného *Galton-Kapteynova*[10]) aparátu, jehož průřez znázorněn jest na obr. 4. Přístroj jest opatřen svrchu nálevkovitým otvorem, proti němuž postaven jest vrcholem malý kuželík a ostatní kuželíky jsou pravidelně rozestaveny co možná nejpřesněji kol osy nádoby tak, že tvoří kužel. Otvorem vpouštíme do nádoby kuličky, jež volíme z důvodů zcela zřejmých co nejméně pružné. Na dně nádoby jsou soustředěné přihrádky, v nichž nastane seskupení kuliček odpovídající rozvoji $(1 + 1)^n$. Pokus ten charakterisuje případ $p = q$. U přístroje znázorněného na obr. 5, jenž nám demonstruje případ $p > q$, kuželíky jsou o různých základnách, jímž jest přizpůsobena ovšem i šířka přihrádek. Obrys průřezu seskupení kuliček v přihrádkách poskytuje v prvém případě křivku *Gaussovou* a v druhém asymetrické křivky, t. zv. křivky *Pearsonovy,* o nichž bude pojednáno ve statistice.

Příklad 10.

Z mincí nalézajících se v osudí vytáhneme nazdařbůh jistou část; jest určiti pravděpodobnost, že vytažen sudý neb lichý počet mincí.

Budiž

a_x počet všech případů, kdy vytažen byl sudý a

b_x počet všech případů, kdy vytažen byl lichý počet mincí,

při čemž x značí neznámý počet vytažených mincí.

Abychom a_x a b_x stanovili, mysleme si číslo x zvětšené o 1, takže a_x přejde v a_{x+1} a podobně b_x v b_{x+1}. Jest potom

$$a_{x+1} = a_x + b_x, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1.)$$

neboť a_{x+1} skládá se především z počtu a_x příslušného k x mincím a dále z b_x téhož počtu, neboť přidáním jedné mince k x každý tah b_x stává se tahem obsahujícím sudá čísla. Dále jest analogicky

$$b_{x+1} = b_x + a_x + 1, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2.)$$

neboť přidaná mince může býti také sama tažena a tím zvětšuje počet možných lichých mincí.

Z rovnice (1.) plyne

$$\Delta a_x = a_{x+1} - a_x = b_x$$

a tedy

$$\Delta^2 a_x = \Delta b_x ,$$

kdež Δ jest operačním symbolem differencí. Podobně skytá (2.) rovnice

$$\Delta b_x = a_x + 1,$$

takže obdržíme differenční rovnici

$$\Delta^2 a_x = a_x + 1,$$

kterou jest integrovati. Ex definitione symbolu Δ^2 jest

$$\Delta^2 a_x = a_{x+2} - 2\, a_{x+1} + a_x = a_x + 1$$

tedy

$$a_{x+2} = 2\, a_{x+1} + 1$$

a proto též

$$a_{x+1} = 2\, a_x + 1.$$

Poslední rovnici pišme ve tvaru

$$a_{x+1} - a_x = a_x + 1$$

a poněvadž ex definitione symbolu Δ

$$a_{x+1} - a_x = \Delta a_x,$$

je též

$$\Delta a_x = a_x + 1 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (3.)$$

Této rovnici jest, jak se snadno přesvědčíme, vyhověno partikulárním integrálem

$$a_x + 1 = \alpha^x,$$

pro který obdržíme

$$\Delta a_x = a_{x+1} - a_x = \alpha^x (\alpha - 1).$$

To vloženo do rovnice (3.), dá

$$\alpha^x (\alpha - 1) = \alpha^x,$$

což jest jen možno, když $\alpha = 2$. Bude proto obecný integrál rovnice (3.) zníti

$$a_x + 1 = c \cdot 2^x,$$

kdež c jest integrační stálá, kterou určíme z podmínky, že pro $x = 1$, $a_x = 0$. Obdržíme

$$1 = c \cdot 2$$

čili

$$c = \frac{1}{2}.$$

Získáme tak

$$a_x = 2^{x-1} - 1.$$

Abychom určili b_x, připomeňme si rovnici

$$b_x = \Delta a_x = a_{x+1} - a_x$$

čímž obdržíme

$$b_x = 2^x - 2^{x-1} = 2^{x-1}$$

a tak konečně

$$(\dot{a}) = \frac{a_x}{a_x + b_x} = \frac{2^{x-1} - 1}{2^x - 1},$$

$$(\dot{b}) = \frac{b_x}{a_x + b_x} = \frac{2^{x-1}}{2^x - 1}.$$

Jest vždy

$$(\dot{b}) > (\dot{a})$$

t. zn. pravděpodobnost vytáhnouti lichý počet mincí jest větší, než pravděpodobnost vytáhnouti sudý počet.

Příklad 11. (*Čebyševův.*)

Jest vyhledati mathematickou pravděpodobnost, že libovolně napsaný zlomek

$$\frac{A}{B}$$

kde A a B jsou celistvými čísly, nedá se krátiti. Označme

$$p_2, p_3, \ldots p_m \ldots$$

pravděpodobnosti, že uvažovaný zlomek nelze krátiti prvočíslem

$$2, 3, \ldots m \ldots,$$

pak hledaná pravděpodobnost jakožto složená bude se rovnati součinu

$$\pi = p_2 p_3 \ldots p_m \ldots \text{ in inf.}$$

Abychom p_m stanovili, vyhledejme především opačnou pravděpodobnost

$$q_m = 1 - p_m.$$

Dělíme-li libovolné celistvé číslo prvočíslem m, obdržíme zbytky

$$0, 1, 2, \ldots m-1,$$

je-li ono číslo prvočíslem m dělitelné, bude zbytek 0, to jest však jeden z m případů

$$0, 1, 2, \ldots m-1$$

možných, proto pravděpodobnost, že A jest číslem m dělitelné, bude se rovnati

$$\frac{1}{m}$$

a touž úvahou i pro číslo B dospějeme k témuž výsledku. Pravděpodobnost, že $\frac{A}{B}$ lze krátiti, dána jest rovnicí

$$q_m = \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{m} = \frac{1}{m^2}$$

a pravděpodobnost, že nelze, jest

$$p_m = 1 - q_m = 1 - \frac{1}{m^2}$$

jest proto

$$\pi = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right)\left(1 - \frac{1}{5^2}\right) \ldots = \frac{6}{\pi^2} = 0{\cdot}608 \ldots$$

tedy větší než $\frac{1}{2}$. Jest tudíž vždy pravděpodobnějším, že libovolně napsaný zlomek $\frac{A}{B}$ se nedá krátiti, než opak, že se dá krátiti.

Příklad 12. *Jistý pokus může dáti výsledek A s pravděpodobností*

$$(A) = p.$$

Jaká jest pravděpodobnost, že při n pokusech A vyskytne se alespoň jednou?

Pravdépodobnost, že A se při n pokusech nevyskytne, jest

$$q^n = (1 - p)^n$$

a pravděpodobnost, že A při n pokusech se vyskytne,

$$(\dot{A}\dot{)}_n = 1 - q^n = 1 - (1 - p)^n.$$

Položíme-li

$$(\dot{A}\dot{)}_n = \frac{1}{2},$$

bude

$$\frac{1}{2} = 1 - (1 - p)^n$$

a odtud

$$n \doteq - \frac{\log 2}{\log (1 - p)}.$$

Značí-li A, že při vrhu kostkou padne určité číslo, bude

$$p = \frac{1}{6} \quad \text{a} \quad n = 3{\cdot}80\ldots$$

Jest tedy pravděpodobno, že při vrhu kostkou teprve ve čtyřech tazích padne určité číslo.

§ 4. Zákon velkých čísel.

Sestrojili jsme algorithmus počtu pravděpodobnosti *svobodně.* Musíme se proto zabývati nyní otázkou, zda námi zavedený algorithmus jest i *účelně* volen, t. j. schopen racionelně pravděpodobnost měřiti, jinak řečeno, musíme zkoumati do jaké míry výsledky našich výpočtů shodují se se skutečností.*) Na to odpovídá zkušenost: *že kdykoliv použijeme algorithmu počtu pravděpodobnosti — za předpokladu jeho aplikability — správně, vždy, je-li jen počet pokusů dostatečný, blížíme se ke skutečnosti, takže se zdá, jakoby existovala předurčená harmonie mezi theorií a praxí.*

Fakt ten nazývá se *zákonem velkých .ísel* a vysvětluje se podle *Poissona***) tím, že při pokusech máme vždy dvojí: *stálý podklad*

*) Srovnej: *Czuber* I. 153 (III. vydání); *Timerding,* Analyse des Zufalls, str. 37 a zvláště *Poincaré,* Science et l' Hyp. 11 Cap. a téhož Calcul des prob.

**) Note sur la loi des grands nombres. Comptes Rendus, 1836.

(na př. osudí naplněné koulemi určitého druhu) a neustále měnící se podmínky výsledku pokusů. Výsledek pokusů jeví se proto jako sklad dvou prvků

$$a + \delta_{x},$$

v němž a značí stálý a δ proměnný element. Při n pokusech máme součet

$$n\,a + (\delta_1 + \delta_2 + \ldots + \delta_n),$$

jenž dělen číslem n skýtá

$$a + \frac{[\delta_x]}{n}.\text{*)}$$

Kolísají-li jednotlivé δ_x kol nuly, bude potom

$$lim\,\frac{[\delta_n]}{n} = 0.$$

Zákon velkých čísel byl a bude ještě dlouho tvrdým oříškem pro filosofii. Musíme se proto spokojiti s konstatováním, kdy a kde se uplatňuje. Jej vysvětliti nedovedeme. I fysikální zákony mají stejný charakter, neboť objevují se ve své ryzosti jen na podkladu velmi velkého počtu pokusů, při nichž ovšem fysik jest ve výhodě, neboť může uspořádáním experimentu odstraniti vše, co zákon zatemňuje. Zákon velkých čísel lze ujasniti též následujícím příkladem:

Mějmež osudí, obsahující 3 bílé a 2 černé koule, pak

$$\dot{(\dot{\circ})} = \frac{3}{5}$$

a eventuality tahu jsou:

○	○	○	●	●
1	2	3	4	5

Představme si, že vykonali jsme velmi velký počet tahů a sestavme z nich úplné serie eventualit. Budiž dále n počet těchto serií a z počet koulí, z nichž úplné serie sestaviti nelze, obdržíme celkem

$$n\,(3_{\circ} + 2_{\bullet}) + z_{\circ} + z_{\bullet}$$

tažených koulí, kde $z_{\circ}$ značí počet zbývajících bílých a $z_{\bullet}$ počet zbývajících černých koulí. Poměr obou jest pak

$$\frac{3\,n + z_{\circ}}{2\,n + z_{\bullet}}.$$

*) Závorky [ ] zde značí Gaussův sumační symbol.

Veličina n roste s počtem tahů. Poněvadž dále dlouhé řady tahů jen bílých aneb jen černých koulí povstávají — jak zkušenost učí — jen výjimečně, bude zpravidla

$$lim \frac{3n + z_0}{5n + z_0 + z_\bullet} = \frac{3}{5},$$

jak zákon velkých čísel předpokládá. Z uvedeného plyne také aposterioristická definice přívlastků „*stejně možný*“ a „*stejně pravděpodobný*“. Tak nazýváme totiž *ony eventuality, jež vedou k zákonu velkých čísel.*

§ 5. Theorie pokusů opětovaných.

A) Věta Bernoulliho.*)

Již *Condorcet* (1785)**) nazval počet pravděpodobnosti *mathematikou mnohonásobně opětovaných pokusů*, theorémy toho počtu odpovídají totiž tím lépe skutečnosti, čím větší počet pokusů béřeme v úvahu. Shoda v případě aplikability jest často tak velká, že se dostáváme do pokušení přikládati algorithmu význam přírodního zákona. Tak na př. theorémy klasické theorie počtu vyrovnávacího uplatňují se při měření úhlů a délek podle mnohonásobné zkušenosti v té míře, že v případě nesouhlasu považujeme měření přímo za nepřesná. Takovou víru v oprávněnost úvah počtu pravděpodobnosti dovedla nám vsugerovati zkušenost. Za účelem vybudování theorie pokusů opětovaných volíme opět nejjednodušší možné případy.

Předpokládejme osudí, v němž nalézají se jen bílé a černé koule a označme mathematickou pravděpodobnost vytáhnouti bílou kouli písmenou p, takže

$$q = 1 - p$$

bude mathematická pravděpodobnost vytáhnouti černou kouli.

1. Pokus. Vytáhneme jednu kouli a po vložení do osudí tah opakujeme. Možné případy jsou zde tyto:

*) *Jakub B.* Ars conjectandi. Basil. 1713 (Ostwalds Klassiker, č. 108), posmrtné dílo vydané *Mikulášem B.*

**) *N. de C.* „Applic. de l'analyse à la prob. des décisions. Paris.

	I.	II.	
1.	○	○	o pravděpodobnosti $p\,p = p^2 = (\circ\circ)$,
2.	○	●	o pravděpodobnosti $p\,q = (\circ\bullet)$,
3.	●	○	o pravděpodobnosti $q\,p = (\bullet\circ)$,
4.	●	●	o pravděpodobnosti $q\,q = q^2 = (\bullet\bullet)$;

Je-li pořadí koulí lhostejné, zbudou jen tři případy o pravděpodobnostech

$$\underbrace{\circ,\circ}\qquad\underbrace{\circ,\bullet}\qquad\underbrace{\bullet,\bullet}$$
$$p^2 = P_{\circ\circ},\quad 2\,p\,q = P_{\circ\bullet},\quad q^2 = P_{\bullet\bullet}$$

a poněvadž jeden z nich se uplatniti musí, jest

$$P_{\circ\circ} + P_{\circ\bullet} + P_{\bullet\bullet} = 1$$

a zároveň

$$p^2 + 2\,p\,q + q^2 = (p+q)^2 = 1.$$

Připomínáme, že počet možných případů je zde $4 = 2^2$.

2. Pokus. Vykonejme ještě jeden tah; počet eventualit vzroste tím na $2^3 = 8$ a obdržíme následující možnosti:

	I.	II.	III.	s pravděpodobnostmi
1.	○	○	○	..... $P_{\circ\circ\circ} = p\,p\,p = p^3$,
2.	○	○	●	
3.	○	●	○	..... $P_{\circ\circ\bullet} = 3\,p\,p\,q = 3\,p^2\,q$,
4.	●	○	○	
5.	○	●	●	
6.	●	○	●	..... $P_{\circ\bullet\bullet} = 3\,p\,q\,q = 3\,p\,q^2$,
7.	●	●	○	
8.	●	●	●	..... $P_{\bullet\bullet\bullet} = q\,q\,q = q^3$

a tím jako dříve rovnice

$$P_{\circ\circ\circ} + P_{\circ\circ\bullet} + P_{\circ\bullet\bullet} + P_{\bullet\bullet\bullet} = 1,$$
$$p^3 + 3\,p^2\,q + 3\,p\,q^2 + q^3 = (p+q)^3 = 1.$$

Tak postupujíce obdržíme pro s tahů a α bílých, β černých koulí, kdež $s = \alpha + \beta$, všeobecně

$$(\alpha\,\beta) = P_{\alpha\beta} = \binom{s}{\alpha} p^\alpha\,q^\beta$$

aneb

$$(\alpha\,\beta) = P_{\alpha\beta} = \frac{s!}{\alpha!\,\beta!}\,p^\alpha\,q^\beta.$$

Jest totiž

$$\binom{s}{\alpha} = \frac{s(s-1)\ldots(s-\alpha+1)}{1.2.\ldots.\alpha} =$$

$$= \frac{s(s-1)\ldots.(s-\alpha+1)(s-\alpha)\ldots3.2.1}{1.2.3.\ldots.\alpha.\beta.(\beta-1)\ldots.3.2.1} = \frac{s!}{\alpha!\,\beta!}$$

Příklad.

V osudí jest 7 bílých a 4 černé koule; vytáhněme kouli a vložme ji opět do osudí, pokus ten budiž opětován celkem pětkráte. Jaká je pravděpodobnost, že vytáhneme právě 3 bílé a 2 černé koule v libovolném pořadí?

Zde jest

$$(\circ) = p = \frac{7}{4+7} = \frac{7}{11}, \qquad (\bullet) = q = \frac{4}{4+7} = \frac{4}{11}$$

a dále

$$\left[\frac{7}{11} + \frac{4}{11}\right]^5 = \frac{16807}{11^5} + \frac{48020}{11^5} + \frac{54880}{11^5} + \frac{31360}{11^5} + \frac{8960}{11^5} + \frac{1024}{11^5},$$

což srovnáme-li s rozvojem

$$[p+q]^5 = P_{5,0} + P_{4,1} + P_{3,2} + P_{2,3} + P_{1,4} + P_{0,5},$$

nalezneme hledanou pravděpodobnost vytáhnouti v pěti tazích 3 bílé a 2 černé koule za předpokladu, že po každém tahu kouli vložíme zpět do osudí:

$$P_{3,2} = 10\,p^3 q^2 = \frac{54880}{11^5}.$$

Abychom nabyli náležitého přehledu, sestavme si grafikon (obr. 6.), kdež za ordináty nanášíme čísla úměrná veličinám P. Vidíme, že pravděpodobnost vytáhnouti 4 bílé a 1 černou kouli jest skorem tak velká jako pravděpodobnost vytáhnouti 3 bílé a 2 černé atd. Grafikon představuje asymetrickou konfiguraci bodů; kdyby $p = q$, obdrželi bychom očividně symetrickou konfiguraci. Vzhledem k dalším úvahám jest důležito vyhledati si maximální hodnotu výrazu $P_{\alpha,\beta}$.

Poněvadž $\alpha + \beta = s$, kdež s značí počet vykonaných pokusů a tedy číslo, které považujeme za stálé, lze položiti

$$\beta = s - \alpha$$

a tím jest $P_{\alpha,\beta}$ funkcí jediné proměnné α. Tak dospějeme podle předcházejícího k vzorci:

$$P_\alpha = \frac{s!}{\alpha!\,(s-\alpha)!}\,p^\alpha q^{s-\alpha} = \binom{s}{\alpha} p^\alpha q^{s-\alpha},$$

udávajícímu *pravděpodobnost, že během* s *pokusů zjev A se celkem α-kráte dostaví.* K určení maxima veličiny P_α nelze upotřebiti počtu differenciálního, ježto P_α není spojitou funkcí proměnné α.

Označme písmenou a onu hodnotu α, při které P_α se stává maximem; zde mohou nastati dva případy, které nejlépe ilustruje obr. 7 a 8. Buď jest

$P_{a-1} < P_a > P_{a+1}$ (obr. 7) aneb $P_{a-1} < P_a = P_{a+1} > P_{a+2}$ (obr. 8).

Shrneme li oba případy v jeden, lze psáti nerovninu

$$P_{a-1} < P_a \geqq P_{a+1} > P_{a+2},$$

z níž plyne

$$\frac{P_{a+1}}{P_a} \leqq 1, \quad \frac{P_a}{P_{a-1}} > 1;$$

jak snadným výpočtem se přesvědčíme, jest

$$\frac{P_{a+1}}{P_a} = \frac{s-a}{a+1}\cdot\frac{p}{q}, \qquad \frac{P_a}{P_{a-1}} = \frac{s-a+1}{a}\cdot\frac{p}{q},$$

tedy

$$\frac{s-a}{a+1}\cdot\frac{p}{q} \leqq 1, \qquad \frac{s-a+1}{a}\cdot\frac{p}{q} > 1.$$

Z obou obdržíme jednoduchou transformací

$$p - \frac{q}{s} \leqq \frac{a}{s} < p + \frac{p}{s}\,^{*)}$$

a pro $s \doteq \infty$ konečně

$$\frac{a}{s} \doteq p$$

čili jinak psáno

$$a \doteq p\,s.$$

---

*) Jest totiž

$$(s-a)\,p \leqq (a+1)\,q, \quad s\,p - q \leqq a\,(p+q) = a,$$
$$(s-a+1)\,p > a\,q, \quad (s+1)\,p > a\,(p+q) = a;$$

spojením nerovnin v právo a dělením s plyne uvedená nerovnina. Že znaménko rovnosti platí toliko pro druhou eventualitu, jest zřejmo z odvození.

Z toho plyne věta:

Při velmi velkém počtu **s** *za stejných podmínek opětovaných pokusů má ono* $a = \mathbf{a}$ *největší mathem. pravděpodobnost, jehož poměr k počtu vykonaných pokusů (t. j.* $\mathbf{a} : s$*) určen jest mathem. pravděpodobností* **p** *příslušného zjevu.*

Věta tato jest základem pro aplikaci počtu pravděpodobnosti a byla odvozena *Jak. Bernoullim* v díle „*Ars conjectandi*" vydaném r. 1713. Nazývá se proto „*větou Bernoulliho*".

Poněvadž

$$s - a = s - p\,s = (1 - p)\,s = q\,s$$

bude i

$$\boxed{\frac{\mathbf{a}}{s - \mathbf{a}} = \frac{\mathbf{p}}{q}.}$$

Věta Bernoulliho, jak z uvedeného vysvítá, jest *větou ryze mathematickou, mathematicky platnou vlastně jen pro typ pokusů A a non A.* Zároveň poznáváme ve vztahu

$$p = \frac{a}{s}$$

základní definici pojmu mathematické pravděpodobnosti.

Naše výpočty nabývají transientního významu pro praxi teprve v důsledku zkušenosti, že *kdykoliv realisovány nějaké pokusy propracovatelné mathematicky na základě algorithmu mathem. pravděpodobnosti, vždy se ukázalo, že výsledky z velkého počtu pozorování se shodovaly s výsledky vypočtenými tím více, čím větší byl počet pokusů.* Tak vykonal na př. Meissner 1800 vrhů kostkou, při kterých se objevilo

číslo	1	2	3	4	5	6	
celkem	299	295	303	307	289	307	kráte.

Mathem. pravděpodobnosti jsou zde

$$\ddot{(1)} = \ddot{(2)} = \ddot{(3)} = \ddot{(4)} = \ddot{(5)} = \ddot{(6)} = \frac{1}{6}$$

a aktuálné odvozené z pokusů:

$$\ddot{(1)}' = \frac{299}{1800} = \ddot{(1)} - \frac{1}{1800},$$

$$\ddot{(2)}' = \frac{295}{1800} = \ddot{(2)} - \frac{5}{1800},$$

$$\ddot{(3)}' = \frac{303}{1800} = \ddot{(3)} + \frac{3}{1800} \text{ atd.}$$

Shoda mezi výpočtem a skutečností jest tudíž velmi veliká. Spojíme-li svrchu uvedenou zkušenost s větou Bernoulliho, obdržíme t. zv. „*větu velkých čísel*" (pokusů):

Při velmi velkém počtu s za stejných podmínek opětovaných pokusů má ono α největší aktuálnou pravděpodobnost, které jest určeno rovnicí

$$\alpha = p\,s.$$

Tedy u předešlého případu

$$\alpha = \frac{1}{6} \,.\, 1800 = 300.$$

Tuto zkušenost lze vysloviti větou:

V případě aplikability algorithmu mathem. pravděpodobnosti jest aktuálná pravděpodobnost úměrná mathematické.

Logickým důsledkem toho jest závěr:

Maximum mathematické pravděpodobnosti odpovídá maximu aktuálné, takže při dostatečně velkém počtu pokusů lze očekávati; že zjev o největší mathematické pravděpodobnosti se i fakticky nejčastěji vyskytne.

B) **Laplaceova formulace věty Bernoulliho.**

Větu *Bernoulliho* nutno však ještě doplniti, ježto výraz „*velký počet pozorování*" jest neurčitým slovem, které nutno kvantitativně určitě definovati.

Jest tudíž řešiti následující problém:

Předpokládejme, že učiněno 2 r pokusů; v jakých hranicích pohybuje se potom veličina α?

Otázku tuto zanechal *Bernoulli* nerozřešenou. Byla řešena později *Laplacem*,*) když *Stirling* (Methodus differentialis, 1730) stanovil approximační formuli

$$s! = 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots s \doteq s^s\, e^{-s} \sqrt{2\pi s}.^{**})$$

Pomocí Stirlingova vzorce lze maximum hodnoty

$$P_{\alpha,\beta} = \frac{s!}{\alpha!\,\beta!}\, p^\alpha q^\beta$$

aproximativně vyčísliti takto: maximum výrazu $P_{\alpha,\beta}$ nastane dle dříve odvozené věty Bernoulliho, když

*) Théorie analyt. d. prob. (1812). Kap. III.

**) Krátké odvození Stirlingova vzorce podává: Dodatek II. na konci.

$$\alpha = p\,s = a,$$
$$\beta = q\,s = b.$$

Vložením těchto hodnot do výrazu $P_{\alpha,\beta}$ obdržíme

$$max\, P_{\alpha,\beta} = P_{a,b} = \frac{s!}{(p\,s)!\,(q\,s)!}\, p^{ps}\, q^{qs},$$

kterýžto lze (viz: Dodatek I. na konci) s dostatečnou aproximací nahraditi následujícím:

$$max\, P_{\alpha,\beta} \doteq \frac{1}{\sqrt{2\,\pi\,s\,p\,q}}.$$

Abychom obdrželi podobné aproximace i pro hodnoty $P_{\alpha,\beta}$, jež jsou kol maximální hodnoty seskupené, položme

$$\alpha = a - r, \qquad \beta = b + r,$$

načež obdržíme

$$P_r = \frac{s!}{(a-r)!\,(b+r)!}\, p^{a-r}\, q^{b+r}$$

čili

$$P_r = \frac{s! \left(\frac{a}{s}\right)^{a-r} \left(\frac{b}{s}\right)^{b+r}}{(a-r)!\,(b+r)!},$$

což zjednodušeno větou Stirlingovou, poskytne

$$P_r = \sqrt{\frac{s}{2\,\pi\,(a-r)\,(b+r)}} \cdot \left(\frac{a}{a-r}\right)^{a-r} \cdot \left(\frac{b}{b+r}\right)^{b+r}.$$

Je-li veličina r oproti a i b malou veličinou, lze i tento výraz valně zjednodušiti (viz: Dodatek I. na konci), čímž obdržíme konečně:

$$P_r \doteq \frac{1}{\sqrt{2\,\pi\,s\,p\,q}} \cdot e^{-\frac{r^2}{2\,p\,q\,s}}. \text{*)}$$

Jak z odvození patrno, platí tato aproximace tím lépe, čím větší jest hodnota součinu $p\,q\,s$. Kdyby byla na př.

$$p = \frac{1}{1000} \quad \text{a} \quad s = 1000,$$

*) O vymezení této aproximace jedná *E. Timerding* v Zeitschr. für Math. und Physik 1914, 362.

takže $p q s = q < 1$, pozbyla by platnosti. Zvláštní případ ten řešen jest ve statistice *zákonem malých čísel.* Hledejme nyní pravděpodobnost $\Pi_{a,r}$, že číslo α nalézá se v hranicích $a - r$ a $a + r$, t. j.

$$a - r < \alpha < a + r.$$

Podle věty o sčítání pravděpodobností jest ona rovna

$$\Pi_{a,r} = P_{-r} + P_{-r+1} + \dots + P_0 + P_1 + P_2 + \dots + P_r = \sum_{-r}^{+r} P_k,$$

kde P_0 značí maximální hodnotu veličin P.

Abychom i pro tuto veličinu obdrželi výhodný tvar, použijeme známého vzorce pro mechanické kvadratury, který pro $y = f(x)$ dává následující aproximaci:

$$2 \int_{-r}^{+r} f(x)\, dx = y_{-r} + 2 y_{-r+1} + \dots + 2 y_0 + 2 y_1 + \dots + 2 y_{r-1} + y_r.$$

Poněvadž se zde jedná o sudou funkci, jest $y_{-r} = y_{+r}$; přičteme-li k předešlé rovnici ještě výraz

$$2 y_r = y_{-r} + y_{+r}$$

získáme

$$\sum_{-r}^{+r} y_k = \int_{-r}^{+r} y\, dx + y_r,$$

a položíme-li $y_r = P_r$, obdržíme dále:

$$\sum_{k=-r}^{k=+r} P_k \doteq \int_{-r}^{+r} \frac{e^{-\frac{\xi^2}{2pqs}}}{\sqrt{2\pi s p q}}\, d\xi + \frac{e^{-\frac{r^2}{2pqs}}}{\sqrt{2\pi s p q}}.$$

K zjednodušení toho výrazu užijme následujících substitucí

$$\frac{\xi}{\sqrt{2 s p q}} = x, \quad \frac{r}{\sqrt{2 s p q}} = \gamma,$$

čímž nabude tvaru

$$\sum_{k=-r}^{k=+r} P_k \doteq \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\gamma}^{+\gamma} e^{-x^2}\, dx + \frac{e^{-\gamma^2}}{\sqrt{2\pi s p q}}.$$

Zanedbáme-li poslední člen jako nepatrný, a připomeneme-li si, že funkce je sudou.*) nabýváme tím konečně

$$\sum_{k=-r}^{k=+r} P_k \doteq \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\gamma} e^{-x^2}\, dx = \Phi(\gamma),^{**)}$$

kdež

$$\gamma = \frac{r}{\sqrt{2spq}}.$$

Budiž zde výslovně zdůrazněno, že věta právě odvozená jest *mathematickou aproximací* výrazu $\sum\limits_{-r}^{+r} P_k$, odvozenou na základě přibližného vzorce methody lichoběžníkové a aproximační formule Stirlingovy pro $s!$ — Tím dospíváme k formulaci *věty Bernoulliho* doplněné *Laplacem*.

Konáme-li velmi velký počet pokusů s, při kterých se může vyskytnouti pouze buď fakt A aneb non A, a je-li pravděpodobnost vyskytnutí se faktu A veličinou stálou a $q = 1 - p$, potom mathematická pravděpodobnost, že během těchto pokusů fakt A nejméně $s - r$-krát a nejvýše $s + r$-krát se objeví, dána jest aproximativně integrálem —

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{r}{\sqrt{2spq}}} e^{-x^2}\, dx,$$

aneb jinak řečeno: Mathematická pravděpodobnost, že za uvedených předpokladů počet α faktických zjevů faktu A bude ležeti v hranicích

$$ps + \gamma\sqrt{2pqs} > \alpha > ps - \gamma\sqrt{2pqs}$$

*) Pro sudé funkce platí rovnice

$$\int_{-a}^{+a} y\, dx = 2\int_0^a y\, dx.$$

**) Zde vyskytující se funkce

$$\Phi(\gamma) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\gamma} e^{-x^2}\, dx$$

jest tabulována v tabulce I. na konci.

dána jest integrálem:

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\gamma e^{-x^2}\,d\,x = \Phi(\gamma), \quad kdež \quad \gamma = \frac{r}{\sqrt{2\,p\,q\,s}}.$$

Tento theorém jest jeden z nejdůležitějších z celého počtu math. pravděpodobnosti. Základní podmínky pro jeho aplikaci jsou: jednak *neodvislost jednoho pokusu od druhého* a konečně *stálost mathem. pravděpodobnosti p během všech pokusů.* Transientní význam theorému Bernoulliho nesmíme však ani v případě jeho aplikability přeceňovati. On praví, jako veškeré věty mathematické pravděpodobnosti, *co nastati může* — čili výrazněji řečeno: *co lze statisticky očekávati s velkou aktuální pravděpodobností,* je-li jen počet pokusů dostatečně velký — ale nikdy, *co by nutně nastati muselo.*

Příklad 1. V osudí jest 7 bílých a 3 černé koule; vytažena stokrát koule a po tahu vždy zpět do osudí vložena. Jaká jest pravděpodobnost, že počet vytažených bílých koulí nebude menší než 65 a větší než 75?

Budiž počet tahů bílé koule a a černé b. Podle Bernoulliho poučky jest

$$a = p\,s = \frac{7}{3+7}\,.\,100 = 70, \quad b = 30.$$

Abychom vyšetřili pravděpodobnost, že počet vytáhnutých bílých koulí leží mezi $65 = 70 - 5$ a $75 = 70 + 5$, položme $r = 5$. Bude

$$\gamma = \frac{r}{\sqrt{2\,s\,p\,q}} = \frac{5}{\sqrt{200\,.\,\frac{7}{10}\cdot\frac{3}{10}}} = 0{\cdot}772.$$

Užitím tabulek obdržíme hledanou pravděpodobnost

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{0\cdot772} e^{-x^2}\,d\,x = \Phi\,(0{\cdot}772) = 0{\cdot}725,$$

jež jest rovna 0·725; tedy větší než $\frac{1}{2}$ a skorem rovna $\frac{3}{4}$. Můžeme tudíž sázeti 3 proti 1, že při 100 pokusech bude počet vytažených bílých koulí se nalézati v hranicích 65 a 75.*)

Příklad 2. Kolik pokusů **s** *jest třeba učiniti, aby s danou pravděpodobností P dosaženo bylo pravděpodobné chyby rovnající se* x% *uvedeného počtu* **s**.

*) Zajímavé aplikace této věty budou podány ve statistice.

Budiž p pravděpodobnost jednoho pokusu. Podle věty Bernoulliho platí potom rovnice

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\gamma} e^{-t^2}\, dt$$

a zároveň žádá se, aby bylo

$$\gamma \sqrt{2\, s\, p\, q} = \frac{x}{100}\, s.$$

Určíme-li z prvé rovnice p, plyne z druhé

$$s = 2\, p\, q \left(\frac{100\, \gamma}{x} \right)^2,$$

čímž jest problém řešen.

Kdybychom chtěli na př. dospěti k pravděpodobnosti $P = 0{\cdot}999$, že počet koulí bílých tažených z osudí, v němž se nalézá 5 bílých a 1 černá koule, nerůzní se více než o 5% od theoretické hodnoty

$$p = (\overset{\cdot\ \cdot}{\mathrm{O}}) = \frac{5}{6},$$

vyhledali bychom si z tabulek integrálu

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\gamma} e^{-t^2}\, dt = 0{\cdot}999$$

hodnotu $\gamma = 2{\cdot}327$ a pomocí této hodnoty obdrželi bychom

$$s = 2 \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{232{\cdot}7}{5} \right)^2 = 602.$$

Museli bychom proto vykonati nejméně 602 pokusů, aby rozdíl mezi pravděpodobností z pokusů odvozenou a theoretickou, t. j.

$$\frac{a}{602} - \frac{5}{6}$$

obnášel méně než 5% theoretické hodnoty $\frac{5}{6}$, t. j. méně než 0·004.

II. Pravděpodobnost a posteriori.

§ 6. Úvod. Formulace problému.

V předcházejících úvahách byla předpokládána úplná *znalost všech* eventualit. Proto jsme mohli odvoditi i logicky oprávněné obrazy pokusů vykonaných ve shodě s předpoklady počtu. Podle toho, v jaké míře těmto předpokladům u konkrétních případu bylo vyhověno, očekávali jsme odůvodněně i shodu obrazů skutečných s obrazy odvozenými z theorie. Bylo-li příkladně v osudí a bílých a b černých koulí, platila rovnice

$$\frac{(\ddot{\circ})}{(\ddot{\bullet})} = \frac{a}{b}$$

za předpokladu, že vytažená koule byla opět po vytažení do osudí vložena. Bylo-li při pokusu během s tahů vytaženo α bílých a β černých koulí, potom tím více jest (podle zákona velkých čísel)

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{a}{b}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1.)$$

čím více vykonáno pokusů. Vezměme nyní v úvahu opačný problém: *V osudí nechť jest neznámý počet x bílých koulí a y černých. Z pokusů vykonaných jako dříve* (*tedy tak, že každá vytažená koule vložena opět do osudí, aby modality zůstaly nezměněny*) *obdrželi jsme α bílých a β černých koulí. Jaký jest poměr bílých koulí k černým?* Zde per analogiam předcházejících úvah klademe

$$\frac{x}{y} \doteq \frac{\alpha}{\beta} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2.)$$

a očekáváme tím větší shodu, čím větší jest počet pokusů. Rovnice (1.) představuje *soud a priori* a rovnice (2.) *soud a posteriori*, pročež mluvíme v tomto případě o *pravděpodobnosti a posteriori*.

Všeobecně můžeme problém pravděpodobností a posteriori formulovati takto:

Modality, podmiňující určitý zjev, nejsou úplně známy, za to však známe větší počet pokusů. Jaké důsledky lze z toho odvoditi?

Hlavní otázky, jež nás při tom interesují, jsou tyto:

Co možná souditi

1. *o skladu eventualit,*
2. *o pokusech, které teprve hodláme učiniti?*

Takového druhu jsou tedy problémy, s nimiž se hodláme zabývati. *Poněvadž nemohou pokusy nikdy nahraditi úplnou znalost eventualit, budou se zpravidla i výsledky našeho usuzování ještě více vzdalovati od jsoucna, než tomu bylo v počtu mathem. pravděpodobnosti a priori, zejména nelze nikdy v počtu pravděpodobnosti a posteriori dospěti k onomu stupni, jež jsme v počtu pravděpodobnosti a priori označovali symbolem 1, t. j. k jistotě.* Z faktu, že slunce dosud vždy následujícího rána vyšlo, nelze souditi, že tomu vždy tak bude i nadále, neboť označíme-li počet dosavádních východů písmenou s, bude pravděpodobnost a posteriori nového východu

$$p = \frac{s}{s+1} \doteq 1 - \frac{1}{s}$$

a tedy vždy jen $p < 1$, ale nikdy $p = 1$.

V tomto smyslu nutno považovati i t. zv. zákony přírodní nejvýše jen za hypothesy o asymptotické pravděpodobnosti Potvrzení toho faktu podávají dějiny věd exaktních bezpočetně.

Slovo „*pravděpodobnost a posteriori*" podobně jako slovo „*pravděpodobnost a priori*" zavedl do mathematiky *J. Bernoulli.**) Podstatný rozdíl mezi dřívější a poslední spočívá v tom, že veškeré eventuality dříve byly známé a nyní ne, takže je musíme nahraditi hypothesami.

Tím vedeni jsme k otázce: *Která z možných hypothes o stavu eventualit jest pravděpodobnější?*

Nový pojem mathem. pravděpodobnosti nutí nás i k doplnění symboliky dosud námi užívané. Jsou-li eventuality přímo dané, budeme označovati jako dosud mathematickou pravděpodobnost a priori faktu A kulatými závorkami, tedy: $(\dot{A})$, což čteme *mathematická pravděpodobnost a priori.* Tam, kde se však jedná o math. pravděpodobnost a posteriori, kde tedy eventuality jsou hypothetické, aneb jen částečně známé, budeme užívati závorek ostrých a psáti: $[\dot{A}]$, což čteme *pravděpodobnost a posteriori.*

§ 7. Pravděpodobnost hypothes (příčin).

Problém pravděpodobnosti příčin byl řešen po prvé anglickým mathematikem *Th. Bayesem* a uveřejněn po jeho smrti Pricem

*) Ars conjectandi p. 224.

(1763).*) U nás pojednává o něm velice instruktivně *K. Vorovka* (v Příl. k. Čas. pro pěst. math. 1913 č. 1). V počtu pravděpodobnosti tvoří přechod od ryzí mathematiky k aplikované, poněvadž vedle theorie jest při něm jsoucno, t. j. zkušenost podkladem mathematických výpočtů. Abychom co nejnázorněji dospěli k jeho formulaci, *řešme následující problém:*

Mějme m osudí $O_1, O_2, \ldots\ldots O_m$, *ve kterých nechť jest* $c_1, c_2, \ldots\ldots c_m$ *koulí a mezi nimi bílých* $b_1, b_2, \ldots\ldots b_m$. *Vytažena byla jedna koule — konstatováno, že bílá. Ptáme se, jaká jest pravděpodobnost, že to bylo právě osudí* O_x, *z něhož byla vytažena.*

Abychom uvedený problém mohli podle dosavadních úvah (mathematické pravděpodobnosti a priori) řešiti, provedeme následující změnu. Především doplníme veškerá osudí na stejný počet M koulí, aniž bychom na poměru bílých k ostatním co měnili. Bude pak

$$M = c_1\,\gamma_1 = c_2\,\gamma_2 = c_3\,\gamma_3 = \ldots\ldots = c_m\,\gamma_m,$$

takže veškerá osudí budou vesměs obsahovati M koulí a mezi těmi jednotlivá $b_\varkappa\,\gamma_\varkappa$ bílých. Nyní můžeme očividně veškerá osudí nahraditi jedním, aniž by se co na pravděpodobnosti vytáhnouti bílou kouli měnilo (viz př. 6. str. 20.). Než však to učiníme, označíme veškeré bílé koule čísly osudí, abychom mohli konstatovati, z kterého osudí vytažená koule pochází. Problém pak nabude tím tohoto znění:

Z osudí O byla vytažena bílá koule, jaká jest pravděpodobnost, že jest znamenána číslem x? Podle definice mathematické pravděpodobnosti a priori jest očividně:

$$(O/x) = \frac{b_x\,\gamma_x}{b_1\,\gamma_1 + b_2\,\gamma_2 + \ldots\ldots + b_m\,\gamma_m},$$

poněvadž však

$$\gamma_\varkappa = \frac{M}{c_\varkappa},$$

jest i

$$(O/x) = \frac{\dfrac{b_x}{c_x}}{\dfrac{b_1}{c_1} + \dfrac{b_2}{c_2} + \ldots\ldots + \dfrac{b_m}{c_m}}$$

*) Nově bylo jeho pojednání vydáno *H. E. Timerdingem* v knihovně Ostwald's Klassiker der ex. Wissenschaften č. 169.

čili
$$(\bigcirc/x) = \frac{(b_x)}{(b_1) + (b_2) + \ldots (b_m)},$$

kdež (b_x) jest pravděpodobnost a priori vytáhnouti z osudí O_x kouli bílou, takže

$$(b_x) = (\bigcirc/O_x) = \frac{b_x}{c_x}.$$

To jest nejjednodušší *formulace věty Bayesovy,* která zní: *Pakli pozorovaný fakt A může býti důsledkem více a priori stejně možných a oprávněných hypothes H, ze kterých se však v každém případě jen jedna jediná uplatní, jest pravděpodobnost, že to byla právě příčina H_x dána výrazem*

$$[H_x/A] = \frac{(A/H_x)}{(A/H_1) + (A/H_2) + \ldots + (A/H_m)}.$$

Příklad.

V osudí ať jsou čtyři koule, bílé a černé; byla vytažena bílá koule. Jaká jest pravděpodobnost, že počet bílých koulí v osudí jest roven dvěma? Máme zde tři možné hypothesy:

$$H_1 \ldots \bigcirc\bigcirc\bigcirc\bullet \ldots (\bigcirc/H_1) = \frac{3}{4},$$

$$H_2 \ldots \bigcirc\bigcirc\bullet\bullet \ldots (\bigcirc/H_2) = \frac{2}{4},$$

$$H_3 \ldots \bigcirc\bullet\bullet\bullet \ldots (\bigcirc/H_3) = \frac{1}{4}.$$

Věta Bayesova dá nám pro druhou hypothesu pravděpodobnost

$$(H_2/\bigcirc) = \frac{(\bigcirc/H_2)}{(\bigcirc/H_1) + (\bigcirc/H_2) + (\bigcirc/H_3)} = \frac{\frac{2}{4}}{\frac{3}{4} + \frac{2}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{1}{3}.$$

V předcházejících úvahách předpokládali jsme, že pravděpodobnosti hypothes H_1, H_2, … H_m jsou stejné. Řešme nyní případ, kdy nejsou stejné. Problém zní pak následovně:

Dány jsou aprioristické pravděpodobnosti

$$(H_1),\quad (H_2),\quad \ldots\ (H_m),$$
$$(A/H_1),\quad (A/H_2),\quad \ldots\ (A/H_m);$$

má se stanoviti

$$[H_x/A].$$

Řešení provedeme ryze formálně; podle základní věty (VII.) na str. 13. jest

$$\dot{(}H_x/A\dot{)} = \frac{\dot{(}\overline{AH_x}\dot{)}}{\dot{(}A\dot{)}},$$

kdež $\dot{(}\overline{AH_x}\dot{)}$ jest pravděpodobnost a priori, že na sobě závislé fakty A i H_x zároveň se vyskytnou a $\dot{(}A\dot{)}$ jest pravděpodobnost a priori pro vyskytnutí se faktu A. Podle téže věty jest

$$\dot{(}\overline{AH_x}\dot{)} = \dot{(}H_x\dot{)}\,\dot{(}A/H_x\dot{)}$$

tedy

$$\dot{(}H_x/A\dot{)} = \frac{\dot{(}H_x\dot{)}\,\dot{(}A/H_x\dot{)}}{\dot{(}A\dot{)}},$$

konečně jest podle věty o sčítání pravděpodobností

$$\dot{(}A\dot{)} = \dot{(}\overline{AH_1}\dot{)} + \dot{(}\overline{AH_2}\dot{)} + \ldots + \dot{(}\overline{AH_m}\dot{)}$$

a proto

$$\dot{(}A\dot{)} = \sum_{k=1}^{k=m} \dot{(}H_k\dot{)}\,\dot{(}A/H_k\dot{)},$$

což dosazeno do předposlední rovnice, dá nám konečně:

$$\dot{[}H_x/A\dot{]} = \frac{\dot{(}H_x\dot{)}\,\dot{(}A/H_x\dot{)}}{\dot{(}H_1\dot{)}\,\dot{(}A/H_1\dot{)} + \dot{(}H_2\dot{)}\,\dot{(}A/H_2\dot{)} + \ldots + \dot{(}H_m\dot{)}\,\dot{(}A/H_m\dot{)}}.$$

Uvedeným vzorcem určena jest *pravděpodobnost a posteriori* pro H_x za předpokladu existentního faktu A.

Řešme nyní druhý problém: *vyčísliti pravděpodobnost nějakého budoucího pokusu B za předpokladu existence faktu A.* Máme zde následující úkol:

Dány jsou aprioristické pravděpodobnosti

$$\dot{(}H_1\dot{)},\ \dot{(}H_2\dot{)},\ \ldots\ldots\ \dot{(}H_n\dot{)},$$

$$\dot{(}A/H_1\dot{)},\ \dot{(}A/H_2\dot{)},\ \ldots\ldots\ \dot{(}A/H_n\dot{)},$$

$$\dot{(}B/AH_1\dot{)},\ \dot{(}B/AH_2\dot{)},\ \ldots\ldots\ \dot{(}B/AH_n\dot{)},$$

hledáme aposteristickou pravděpodobnost

$$\dot{[}B/A\dot{]}.$$

Podle předcházející věty jest v důsledku existence faktu A pravděpodobnost hypothesy H_x dána aposteristickou pravděpodobností

$[H_x/A]$. Dále jest složená pravděpodobnost, že jednak hypotesa H_x jest existentní a za druhé, že v důsledku toho se fakt B objeví, dána výrazem

$$[B/A]_x = [H_x/A] \cdot (B/AH_x).$$

Poněvadž však x může býti každým číslem 1, 2, 3 .... n, bude podle věty o sčítání pravděpodobností

$$[B/A] = [B/A]_1 + [B/A]_2 + \ldots\ldots + [B/A]_n.$$

z čehož plyne

$$[B/A] = [H_1/A]\,(B/AH_1) + \ldots\ldots + [H_n/A]\,(B/AH_n).$$

Dosadíme-li ještě za $[H/A]$ příslušnou hodnotu z výše uvedené rovnice: bude konečně

$$[B/A] = \frac{(H_1)\,(A/H_1)\,(B/AH_1) + \ldots + (H_n)\,(A/H_n)\,(B/AH_n)}{(H_1)\,(A/H_1) + \ldots + (H_n)\,(A/H_n)}.$$

Tím dána jest odpověď na otázku o pravděpodobném výsledku pokusů, jež hodláme vykonati.

Příklad.

V osudí nechť jsou čtyři koule: bílé a černé v neznámém poměru. Čtyřikráte vytažena koule, která vždy po tahu opět vložena byla do osudí zpět. Výsledek pokusů byl následující: třikrát vytažena byla koule bílá a jednou černá. Možné hypothesy jsou zde tyto

H_1 ..... ○ ○ ○ ●,
H_2 ..... ○ ○ ● ●,
H_3 ..... ○ ● ● ●.

a poněvadž žádné nelze dáti přednost, bude

$$(H_1) = (H_2) = (H_3) = \frac{1}{3}.$$

Pravděpodobnost faktu A vytáhnouti třikrát bílou a jednou černou kouli pro jednotlivé hypothesy jest

$$(A/H_1) = \left(\frac{3}{4}\right)^3 \cdot \frac{1}{4} = \frac{27}{256},$$

$$(A/H_2) = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{16}{256},$$

$$(A/H_3) = \left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{256}.$$

Obdržíme tak na základě vzorce o pravděpodobnosti hypothes

$$[\dot{H_1}/\dot{A}] = \frac{27}{27+3+16} = \frac{27}{46},$$

$$[\dot{H_2}/\dot{A}] = \frac{16}{27+3+16} = \frac{16}{46},$$

$$[\dot{H_3}/\dot{A}] = \frac{3}{27+3+16} = \frac{3}{46}$$

pro pravděpodobnosti složení osudí, z čeho soudíme, že hypothesa H_1 jest nejpravděpodobnější, což lze také předem podle zdravého rozumu očekávati.

Ptáme se nyní: „*Jaká jest pravděpodobnost vytáhnouti při novém tahu bílou kouli (fakt B)?*“ — Máme zde především

$$(\dot{B}/\dot{A}H_1) = \frac{3}{4},$$

$$(\dot{B}/\dot{A}H_2) = \frac{1}{2},$$

$$(\dot{B}/\dot{A}H_3) = \frac{1}{4},$$

takže pravděpodobnost vytáhnouti při novém pokusu bílou kouli jest rovna

$$[\dot{B}/\dot{A}] = [\dot{O}] = \frac{27}{46} \cdot \frac{3}{4} + \frac{16}{46} \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{46} \cdot \frac{1}{4} = 0{\cdot}63.$$

Poněvadž $0{\cdot}63 > 0{\cdot}5$, lze na základě logiky počtu pravděpodobnosti očekávati, že při novém tahu objeví se spíše opět bílá koule než černá.

§ 8. Integrální formulace Bayesova theorému.

Předpokládejme skupinu s pokusů, při kterých jest možný zjev A s pravděpodobností p a zjev *non* A s pravděpodobností q, takže $p + q = 1$. Mathematická pravděpodobnost P, že se zjev A v s pokusech a-kráte vyskytne a *non* A v s pokusech $b = s - a$-krát, jest podle předešlých úvah (viz § 5) úměrná výrazu

$$p^a (1-p)^b,$$

takže lze psáti

$$P = (\dot{a}/\dot{p}) = c \cdot p^a (1-p)^b,$$

kde c jest veličinou stálou.

Učiňme nyní další předpoklad, že známe a na základě vykonaných pokusů, avšak neznáme p a předložme si problém vyhledati pravděpodobnost a posteriori, že

$$M < p < N,$$

kdež M a N jsou předem daná libovolná čísla, vyhovující toliko podmínce

$$0 < M < N < 1.$$

Mathematická pravděpodobnost a posteriori, že hledaná pravděpodobnost rovná se p, jest určena rovnicí

$$[\dot{p}/\dot{a}] = \frac{(\dot{p})\,(\dot{a}/\dot{p})}{\Sigma\,(\dot{p})\,(\dot{a}/\dot{p})}.$$

Předpokládáme-li, že modality se během jednotlivých pokusů nemění, bude $(\dot{p})$ veličinou stálou, čímž uvedený vzorec se zjednodůší v následující:

$$[\dot{p}/\dot{a}] = \frac{(\dot{a}/\dot{p})}{\Sigma\,(\dot{a}/\dot{p})} = \frac{p^a\,(1-p)^b}{\Sigma\,p^a\,(1-p)^b}.$$

Budiž nyní počet pokusů nekonečný a položme $p = x$, abychom naznačili, že p jest hledanou veličinou. Násobme dále čitatele a jmenovatele $d\,x$, obdržíme

$$[\dot{p}/\dot{a}] = \frac{x^a\,(1-x)^b\,.\,d\,x}{\Sigma\,x^a\,(1-x)^b\,d\,x}.$$

Ve jmenovateli jsou veškeré hodnoty, ležící v intervalu od 0 do 1, pro x připustny, alespoň potud, pokud nebylo žádného zvláštního předpokladu o x; můžeme tedy psáti

$$[\dot{p}/\dot{a}] = \frac{x^a\,(1-x)^b\,d\,x}{\int_0^1 x^a\,(1-x)^b\,d\,x}.$$

Jedná-li se o hodnoty p v mezích M do N, bude dále podle věty o sčítání pravděpodobností platiti rovnice

$$\sum_M^N [\dot{p}/\dot{a}] = \frac{\sum_M^N x^a\,(1-x)^b\,d\,x}{\int_0^1 x^a\,(1-x)^b\,d\,x}$$

a tak, poněvadž opět a priori každá hodnota obsažená v mezích M a N jest přípustná, obdržíme pro hledanou pravděpodobnost, že neznámá hodnota $x = p$ jest obsažena v hranicích M a N, výraz

$$P = \frac{\int_M^N x^a (1-x)^b \, dx}{\int_0^1 x^a (1-x)^b \, dx}.$$

Předložme si nyní následující problém:

Ve velké řadě **s** *pokusů konstatován zjev A celkem* **a**-*kráte a zjev* ***non A***, **b**-*kráte. Co možno z toho souditi o neznámé pravděpodobnosti*

$$(A) = p?$$

Nejpravděpodobnější hypothesa jest podle věty Bernoulliho

$$p \doteq \frac{a}{s},$$

položíme-li proto

$$p = \frac{a}{s} + \xi,$$

bude podle předcházejícího theorému pravděpodobnost, že ξ jest obsaženo v mezích

$$-\delta < \xi < +\delta$$

dána výrazem

$$P = \frac{\int_{-\delta}^{+\delta} x^a (1-x)^b \, dx}{\int_0^1 x^a (1-x)^b \, dx}.$$

Jest však (viz K. Petr, Počet integrální str. 384, 391, 401)

$$\int_0^1 x^a (1-x)^b \, dx = \frac{a! \, b!}{(s+1)!},$$

dále lze psáti

$$y = x^a (1-x)^b = \left(\frac{a}{s} + \xi\right)^a \left(\frac{b}{s} - \xi\right)^b =$$
$$= \frac{a^a\, b^b}{s^s} \left(1 + \frac{s}{a}\,\xi\right)^a \left(1 - \frac{s}{b}\,\xi\right)^b,$$

z čehož logarithmováním a rozvedením logarithmů výrazů v závorkách v řady obdržíme aproximaci

$$y = \frac{a^a\, b^b}{s^s}\, e^{-\frac{s^s}{2ab}\xi^2},$$

a tím

$$P = \frac{(s+1)!}{a!\,b!}\;\frac{a^a\, b^b}{s^s} \int_{-\delta}^{+\delta} e^{-\frac{s^s \xi^2}{2ab}}\, d\xi.$$

Výraz ten můžeme pomocí vzorce Stirlingova zjednodušiti tímto stupem: jest

$$\frac{(s+1)!}{a!\,b!} \doteq \frac{(s+1)\, s^s \sqrt{s}}{a^a\, b^b \sqrt{2\pi a b}} = \frac{s^s}{a^a\, b^b} \cdot \frac{(s+1)\sqrt{s}}{\sqrt{2\pi a b}} \doteq$$
$$\doteq \frac{s^s}{a^a\, b^b} \cdot \frac{\sqrt{s^3}}{\sqrt{2\pi a b}},$$

jest proto

$$P \doteq \sqrt{\frac{s^3}{2\pi a b}} \int_{-\delta}^{+\delta} e^{-\frac{s^s}{2ab}\xi^s}\, d\xi.$$

Položíme-li nyní

$$t = \xi \sqrt{\frac{s^3}{2ab}}, \qquad \gamma = \delta \sqrt{\frac{s^3}{2ab}},$$

obdržíme

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\gamma} e^{-t^2}\, dt$$

a tím výsledek:

S pravděpodobností

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\gamma} e^{-t^2}\, dt,$$

lze očekávati, že neznámá pravděpodobnost

$$(A) = p,$$

jest obsažena v hranicích

$$\frac{a}{s} - \gamma \sqrt{\frac{2ab}{s^3}} < (\dot{A}) < \frac{a}{s} + \gamma \sqrt{\frac{2ab}{s^3}}.$$

Vyhledejme si maximum P. To nastane, je-li

$$y = max.$$

čili když

$$\frac{dy}{dx} = x^{a-1}(1-x)^{b-1}\{a(1-x) - bx\} = 0,$$

z čehož opět plyne, že pro maximální hodnotu P platí rovnice

$$x = \frac{a}{a+b} = \frac{a}{s}.$$

neboť, jak se snadno přesvědčíme, má v tomto případě $\frac{d^2y}{dx^2}$ hodnotu zápornou. Hypothesa, že $x = \frac{a}{s}$, jest tudíž ona, která mezi všemi možnými má největší pravděpodobnost. Jsme tak opět u *Bernoulliho* theorému a věta *Bayesova* představuje vlastně zvratný theorém Bernoulliho.

Příklad 1.

V osudí jsou jen bílé a černé koule a při **s** *tazích byla vytažena vždy bílá koule. Jaká jest pravděpodobnost, že v osudí jest více bílých než černých koulí?*

Pravděpodobnost vytáhnouti bílou kouli $(\dot{\circ}) = x$ jest neznáma, neboť počet bílých a černých koulí v osudí není znám. Pravděpodobnost a priori, že v s po sobě jdoucích tazích (předpokládáme, že vytažená koule byla vždy zpět vložena do osudí) vytáhneme bílou, jest pak rovna

$$(\dot{\circ})(\dot{\circ})(\dot{\circ})\ldots(\dot{\circ}) = x^s.$$

Má-li býti v osudí více bílých než černých koulí, musí

$$1 > (\dot{\circ}) > \frac{1}{2}.$$

Pravděpodobnost toho jest podle předcházejícího

$$\frac{\int_{1/2}^{1} x^s\,dx}{\int_{0}^{1} x^s\,dx} = 1 - \frac{1}{2^{s+1}}$$

a blíží se tím více k jistotě, čím větší jest počet pokusů.

Příklad 2.

V osudí vloženo jest **c** *koulí a to tím způsobem, že padla-li při vrhu mincí hlava, vložena bílá koule, jinak černá. Druhá osoba učinila z takto složeného osudí* **s** *tahů, při čemž vytažená koule byla vždy vložena zpět do osudí. Vytaženo bylo* **m** *bílých a* **n** *černých koulí. Jaký jest nejpravděpodobnější počet bílých* (**x**) *a černých* (**y**) *koulí za předpokladu, že* **c** *a* **s** *jsou velká čísla?**)

Zde lze nezávisle na Bayesově theorému uvažovati takto: Jest především

$$\overset{..}{(x)} = \frac{x}{c}, \quad \overset{..}{(y)} = \frac{y}{c}, \quad x + y = c,$$

poněvadž obě čísla určena byla vrhem mincí, při němž hlava jest stejně pravděpodobná jako orel, mělo by a priori aproximativně býti

$$\overset{..}{(x)}_1 = \overset{..}{(y)}_1 = \frac{1}{2}.$$

Podle tahů druhé osoby soudili bychom, že pro tytéž pravděpodobnosti platí a posteriori rovnice

$$\overset{..}{(x)}_2 = \frac{m}{s}, \quad \overset{..}{(y)}_2 = \frac{n}{s}, \quad m + n = s,$$

kdyby $c = s$, byla by pravděpodobnost obou hypothes stejná, v případě $c > s$ prvé větší. Hypothesy nejsou však stejné váhy. Je-li váha prvé hypothesy rovna c, t. j. počtu vrhů, bude váha druhé hypothesy rovna s, t. j. počtu tahů, takže shrneme-li obě hypothesy v jednu, obdržíme pravděpodobnost

$$\frac{c \cdot \frac{1}{2} + s \cdot \frac{m}{s}}{c + s} = \frac{c + 2m}{2(c + s)},$$

jež jest nejpravděpodobnější hypothesou.

---

*) Conf. *Bertrand,* Calcul des Prob. (1889). Str. 152.

Vyhledejme si nyní theoretické řešení téhož problému. Pravděpodobnost, že v osudí místo $\frac{c}{2}$ koulí bílých nalézá se jich $\frac{c}{2} - l$, jest podle Bernoulliho theorému úměrná výrazu

$$e^{-\frac{2l^2}{c}}.$$

Neboť položíme-li ve výraze

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi c p q}} e^{-\frac{l^2}{2cpq}}$$

aproximativně $p = q = \frac{1}{2}$, získáme

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\frac{2l^2}{c}}.$$

Dále jest pravděpodobnost vytáhnouti bílou resp. černou kouli

$$\frac{1}{c}\left(\frac{c}{2} - l\right) = \frac{1}{2} - \frac{l}{c} \quad \text{resp.} \quad \frac{1}{c}\left(\frac{c}{2} + l\right) = \frac{1}{2} + \frac{l}{c}.$$

Hledaná pravděpodobnost bude se proto skládati z

1. pravděpodobnosti, že v osudí jest $\frac{c}{2} - l$ bílých koulí místo $\frac{c}{2}$,
2. pravděpodobnosti vytáhnouti m bílých,
3. pravděpodobnosti vytáhnouti n černých koulí.

Položíme-li

$$\frac{l}{c} = z,$$

obdržíme složenou pravděpodobnost:

$$P \sim e^{-2cz^2}\left(\frac{1}{2} - z\right)^m \left(\frac{1}{2} + z\right)^n.$$

Abychom nabyli nejpravděpodobnější hodnoty pro z, nutno vyhledati P_{max} pomocí rovnice

$$\frac{dP}{dz} = 0.$$

Logarithmickou derivací získáme

$$-4cz - \frac{2m}{1-2z} + \frac{2n}{1+2z} = 0.$$

Omezíme-li se na první mocniny z (co při velmi velkém počtu pokusů jest vždy možné), obdržíme pro z, jež dává $P = max.$, hodnotu

$$z = \frac{n-m}{2(c+s)}$$

a tím pro pravděpodobnost vytáhnouti bílou kouli

$$\frac{1}{2} - z = \frac{c+2m}{2(c+s)},$$

tedy totéž, co dala nám přímá úvaha.

§ 9. Poincarého theorém.*)

Důležitou aplikaci Bayesova theorému představuje následující problém:

Buďtež

$$x_1, x_2, \dots . x_n$$

pozorované hodnoty neznámé veličiny x; *jaká jest pravděpodobnost hypothesy, že hledaná veličina jest v mezích* s *a* $s + ds$, *kdež* s *jest nějakou vhodnou předem danou funkcí pozorovaných veličin, na př. arithmetickým průměrem*

$$z = x_0 = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}.$$

Pravděpodobnost, že x_i leží v hranici x_i a $x_i + dx_i$ označme symbolem $\dot{(}x_i/z\dot{)}\, dx_i$; potom jest pravděpodobnost, že se celý soubor chyb t. j. $x_1, x_2, \dots . x_n$ zároveň objeví, dána výrazem

$$u \equiv \dot{(}x_1/z\dot{)}\, \dot{(}x_2/z\dot{)} \dots . \dot{(}x_n/z\dot{)}\, dx_1\, dx_2 \dots . dx_n.$$

Budiž dále

$$v \equiv \dot{(}z\dot{)}\, dz$$

pravděpodobností, že neznámá veličina $x = z$ leží v intervalu z až $z + dz$. Podle věty *Bayesovy* jest pak pravděpodobnost hypothesy, že neznámá veličina má hodnotu z

*) Při prvém studiu možno § 9 vynechati. Věty zde uvedené bude užito v methodě nejmenších čtverců.

$$P_z\,dz = \frac{u\,v}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} u\,v\,dz} =$$

$$= \frac{(\dot{z})\,(\dot{x_1/z})\,(\dot{x_2/z})\ldots(\dot{x_n/z})\,dz\,dx_1\ldots dx_n}{\sum\limits_{-\infty}^{+\infty}(\dot{z})\,(\dot{x_1/z})\,(\dot{x_2/z})\ldots(\dot{x_n/z})\,dz\,dx_1\ldots dx_n}.$$

Pravděpodobnost ta jest samozřejmě nekonečně malou; položme

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}(\dot{z})\,(\dot{x/z})\,d\,z = \frac{1}{c},$$

kdež c jest veličinou stálou, můžeme psáti:

$$P_z = c\prod_{1}^{n}(\dot{x_i/z}).$$

Přiznáme-li, jak to počet nejmenších čtverců předpokládá, výrazu

$$z = x_0 = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$

povahu principu nabytého zkušeností, musí podle věty Bernoulliho P_z býti pro $z = x_0$ maximem. Maximum nastane však tehdy, je-li

$$\frac{\partial P_z}{\partial z} = 0$$

aneb, jinak psáno, když

$$\frac{1}{P_z}\cdot\frac{\partial P_z}{\partial z} = \frac{\partial \log P_z}{\partial z} = \sum_{i=1}^{i=n}\frac{\partial \log(\dot{x_i/z})}{\partial z} = 0.$$

Položíme li krátce

$$\frac{\partial}{\partial z}\log(\dot{x_i/z}) = f\,(x_i, z),$$

obdržíme tím podmínku pro maximum ve tvaru

$$\sum_{i=1}^{i=n} f\,(x_i, z) = 0.$$

Z rovnice

$$z = x_0 = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$

plyne pro virtuálnou variaci

$$z + \delta z = \frac{x_1 + \delta x_1 + x_2 + \delta x_2 + \ldots . + x_n + \delta x_n}{n}$$

podmínka

$$\delta z = \frac{1}{n} \left\{ \delta x_1 + \delta x_2 + \ldots . + \delta x_n \right\}.$$

Virtuálnou variací nazýváme totiž takovou variaci, která hodnotu funkce nemění, na př. je-li

$$f(x + \delta x) = f(x) + f'(x) \delta x,$$

bude virtuálná variace podmíněna rovnicí

$$f'(x) \delta x = 0.$$

Rovnici té lze vyhověti u jedné proměnné pro dostatečně malé variace jen v okolí maxim neb minim funkce, kde $f'(x) = 0$. U více proměnných zpravidla však v okolí všech hodnot.

Podobně obdržíme pro virtuálné změny rovnice

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i, z) = \sum_{i=1}^{n} \left\{ f(x_i, z) + \frac{\partial f(x_i, z)}{\partial x_i} \delta x_i \right\} = 0$$

podmínku

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x_i, z)}{\partial x_i} \delta x_i = 0,$$

z čehož, značí-li λ neurčitý násobek, obdržíme sloučením obou podmínek v jednu

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f(x_i, z)}{\partial x_i} - \lambda \right) \delta x_i = 0$$

čili vzhledem k nezávislosti jednotlivých x_i na ostatních

$$\frac{\partial f(x_i, z)}{\partial x_i} = \lambda, \qquad i = 1, 2, \ldots . n$$

aneb krátce psáno:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = \ldots = \frac{\partial f_n}{\partial x_n}.$$

To jest však jen tenkráte všeobecně možno, neobsahují-li diferenciální poměry $\frac{\partial f_i}{\partial x_i}$ žádných veličin x_i více. Lze tudíž položiti, znamená-li $A(z)$ libovolnou funkci veličiny z,

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_i} = A(z)$$

čili

$$f_i = x_i A(z) + B(z),$$

jest však

$$\sum_{i=1}^{n} f_i = 0 = A(z) \,.\, [x_n] + n \,.\, B(z)^{*})$$

a poněvadž

$$[x_n] = n z,$$

i

$$z A(z) + B(z) = 0.$$

Obdržíme tak

$$\frac{\partial}{\partial z} \log (\dot{}^{x_i}/z\dot{}) = x_i A(z) + B(z)$$

z toho integrací

$$\log (\dot{}^{x}/z\dot{}) = x \int A(z)\, dz + \int B(z)\, dz + const,$$

kde stálou lze psáti ve tvaru $\log E(x)$ a tím konečně

$$(\dot{}^{x}/z\dot{}) = E(x) \,.\, e^{x\, C(z) + D(z)}$$

s podmínečnou rovnicí

$$z A'(z) + B'(z) = 0.$$

To jest *Poincarého* zákon chyb, založený na jediném předpokladu arithmetického průměru. Abychom od všeobecného theorému dospěli k formulaci Gaussově, předpokládejme, že

$$(\dot{}^{x}/z\dot{}) = F(z - x) = F(\delta z),$$

*) Závorky [ ] značí zde Gaussův sumační symbol.

t. j., že *pravděpodobnost objevení se rozdílu* $z - x = \delta z$ *jest funkcí jedině jeho velikosti a dokud nevykonáme pozorování, každá hypothesa veličiny* z *jest stejně oprávněná, t. j. stejně pravděpodobná*, čili analyticky vyjádřeno

$$(\dot{z_1}) = (\dot{z_2}) = \ldots . = const.$$

Z těchto dvou dodatečných podmínek plyne

$$(\dot{x/z}) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2(z-x)^2},$$

kdež h jest konstantou; to jest ale t. zv. *Gaussův princip.*

§ 10. **Definice symbolu** $\{\dot{\ }\}$.*)

Předpokládejme, že v důsledku aktu A veličina X nabývá číselných hodnot

$$x_1, x_2, x_3, \ldots . x_n$$

a *žádných jiných*, takže platí je-li $p_k = (\dot{x_k/A})$ pravděpodobností, že právě x_k se v důsledku existentního aktu A objeví, rovnice

$$p_1 + p_2 + p_3 + \ldots . . + p_n = 1.$$

Symbol $\{\dot{\ }\}$ jest za těchto předpokladů definován rovnicí

$$\{\dot{X}\} = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \ldots + p_n x_n$$

a představuje určitou průměrnou hodnotu veličin x_k. Že se jedná o průměrnou hodnotu, stane se evidentním, píšeme-li $\{\dot{X}\}$ následujícím způsobem:

$$\{\dot{X}\} = \frac{p_1 x_1 + p_2 x_2 + \ldots . . + p_n x_n}{p_1 + p_2 + \ldots . . + p_n}.$$

Proto užívá na př. Czuber místo symbolu $\{\dot{\ }\}$ označení $D(x)$, kde D jest počáteční písmeno slova „*Durchschnitt*".

Příklad.

Při vrhu kostkou (akt A) může počet ok (veličina X) nabývati hodnot:

---

*) Doporučuje se při prvém studiu § 10, 11, 12 vynechati s výjimkou definice symbolu $\{\dot{\ }\}$, která jest potřebnou v § 13.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
1	2	3	4	5	6

a žádných jiných. Pravděpodobnosti jsou zde

$$p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = p_5 = p_6 = \frac{1}{6}$$

a proto:

$$\dot{\{}X\dot{\}} = \frac{1}{6}(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = \frac{7}{2}.$$

Význam čísla $\frac{7}{2}$ jest následující. Předpokládejme hru, při které hráč obdrží vždy tolik korun, kolik padlo ok. Potom při N hrách, ve kterých rozhoduje náhoda a N jest dostatečně velkým číslem, může hráč očekávati, že obdrží celkem $\frac{7}{2}N$ korun. Proto také hodnota symbolu $\dot{\{}X\dot{\}}$ nazývá se často „*mathematickou nadějí*“ aneb i (očekávaným) „*risikem*“ či chancí hry („*mensura sortis*“, mathematische Hoffnung, risque mathématique, mathematical expectation). Jak již v úvodu bylo naznačeno, byla mathematická naděje historickým východiskem počtu pravděpodobnosti.

Zavedený symbol $\dot{\{}\ \dot{\}}$ jest symbolem určité operace podobně jako na př. Gaussův sumační symbol [ ] a následkem toho bude na př.

$$\dot{\{}X^2\dot{\}} = \sum p\, x^2 = p_1 x_1^2 + p_2 x_2^2 + \ldots + p_n x_n^2.$$

Mějmež na př. nyní dvě skupiny čísel

$$x_1, x_2, \ldots x_l,$$
$$y_1, y_2, \ldots y_m,$$

s pravděpodobnostmi

$$p_1, p_2, \ldots p_l,$$
$$p_1', p_2', \ldots p_m',$$

jež jsou *úplně* na sobě nezávislé a vytvořme

$$\dot{\{}X\dot{\}} = \sum_l x\, p,$$

$$\dot{\{}Y\dot{\}} = \sum_m y\, p',$$

potom platí a to *následkem předpokladu úplné nezávislosti veličin X a Y jen v případech, když*

$$X \gtrless Y,$$

následující věty:

$$\dot{\{}X\dot{\}} + \dot{\{}Y\dot{\}} = \dot{\{}X + Y\dot{\}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{I)}$$

$$\dot{\{}X\dot{\}}\, \dot{\{}Y\dot{\}} = \dot{\{}X\,Y\dot{\}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{II)}$$

Důkaz: Ex definitione jest

$$\dot{\{}X\dot{\}} = \sum_{i=1}^{l} x_i\, p_i, \qquad \sum_{i=1}^{l} p_i = 1,$$

$$\dot{\{}Y\dot{\}} = \sum_{k=1}^{m} y_k\, p_k', \qquad \sum_{k=1}^{m} p_k' = 1$$

a podle věty o složené pravděpodobnosti

$$r_{ik} = \dot{(}x_i\, y_k\dot{)} = \dot{(}x_i\dot{)}\,\dot{(}y_k\dot{)} = p_i\, p_k'$$

pro $i = 1, 2, 3 \ldots . l,$
$k = 1, 2, 3 \ldots . m.$

Na celku se nic nezmění, násobíme-li prvý člen pravé strany rovnice

$$\dot{\{}X\dot{\}} + \dot{\{}Y\dot{\}} = \sum_{i=1}^{l} x_i\, p_i + \sum_{k=1}^{m} y_k\, p_k'$$

výrazem $\sum_{k=1}^{m} p_k' = 1$, a obdobně druhý výrazem $\sum_{i=1}^{l} p_i = 1$, čímž obdržíme

$$\sum_{i=1}^{l} x_i\, p_i \sum_{k=1}^{m} p_k' + \sum_{k=1}^{m} y_k\, p_k' \sum_{i=1}^{l} p_i = \sum_{i=1}^{l} \sum_{k=1}^{m} (x_i + y_k)\, p_i\, p_k' =$$

$$= \sum_{i=1}^{l} \sum_{k=1}^{m} (x_i + y_k)\, r_{ik} = \dot{\{}X + Y\dot{\}},$$

takže uvedená věta jest dokázána.

Položme krátce $\dot{\{}X + Y\dot{\}} = \dot{\{}M\dot{\}}$ a přičtěme $\dot{\{}Z\dot{\}}$, jest

$$\dot{\{}M\dot{\}} + \dot{\{}Z\dot{\}} = \dot{\{}M + Z\dot{\}}$$

čili

$$\dot{\{X\}} + \dot{\{Y\}} + \dot{\{Z\}} = \dot{\{X + Y + Z\}}.$$

Stejně získáme všeobecný vztah

$$\dot{\{X\}} + \dot{\{Y\}} + \ldots + \dot{\{W\}} = \dot{\{X + Y + \ldots + W\}}.$$

Máme-li zvláště vyčísliti výraz $\dot{\{A + X\}}$, kde veličina A jest konstantní, to znamená schopna nabýti vždy s pravděpodobností rovné 1 hodnoty a, jest

$$\dot{\{A + X\}} = \dot{\{A\}} + \dot{\{X\}} = a + \dot{\{X\}}.$$

Dokažme nyní druhou základní větu naší symboliky:

Součin mathem. nadějí veličin X a Y rovná se mathem. naději jejich součinu, t. j.

$$\dot{\{X\}}\,\dot{\{Y\}} = \dot{\{X\,Y\}}.$$

Ex definitione jest

$$\dot{\{X\}} = \sum_{i=1}^{l} x_i\,p_i, \qquad \sum_{i=1}^{l} p_i = 1,$$

$$\dot{\{Y\}} = \sum_{k=1}^{m} y_k\,p_k', \qquad \sum_{k=1}^{m} p_k' = 1,$$

tedy

$$\dot{\{X\}}\,\dot{\{Y\}} = \sum_{i=1}^{l} x_i\,p_i \,.\, \sum_{k=1}^{m} y_k\,p_k' = \sum_{\substack{i=1\\k=1}}^{\substack{i=l\\k=m}} x_i\,y_k\,p_i\,p_k' =$$

$$= \sum_{\substack{i=1\\k=1}}^{\substack{i=l\\k=m}} x_i\,y_k\,r_{ik} = \dot{\{X\,.\,Y\}},$$

čímž uvedená věta jest dokázána. Zcela obdobnou úvahou dospějeme k obecnému vztahu

$$\dot{\{X\}}\,\dot{\{Y\}}\ldots\dot{\{W\}} = \dot{\{X\,Y\ldots W\}}.$$

Poznámka. Věta ta jak již výše uvedeno nesmí býti přenesena na případ

$$X = Y,$$

neboť bychom obdrželi

$$\dot{\{}X\dot{\}}\,\dot{\{}X\dot{\}} = \dot{\{}X \,.\, X\dot{\}} = \dot{\{}X^2\dot{\}} = (\dot{\{}X\dot{\}})^2,$$

tedy větu očividně nesprávnou.

Příklady:

1) Nabývá-li veličina X hodnot $x_1, x_2, \ldots x_n$ s pravděpodobnostmi $p_1, p_2, \ldots p_n$, pak její mathematická naděje

$$\dot{\{}X\dot{\}} = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \ldots + p_n x_n$$

jest obsažena mezi největší a nejmenší z hodnot veličiny X; neboť je-li ζ' nejmenší a ζ'' největší z nich; platí nerovnina

$$\zeta'(p_1 + p_2 + \ldots + p_n) < \dot{\{}X\dot{\}} < \zeta''(p_1 + p_2 + \ldots + p_n)$$

čili

$$\zeta' < \dot{\{}X\dot{\}} < \zeta''.$$

2) $$\dot{\{}X - \dot{\{}X\dot{\}}\dot{\}} = \dot{\{}X\dot{\}} - \dot{\{}\dot{\{}X\dot{\}}\dot{\}} = 0.$$

3) $$\dot{\{}X\,\dot{\{}Y\dot{\}}\dot{\}} = \dot{\{}X\dot{\}}\,\dot{\{}Y\dot{\}}.$$

4) $$\dot{\{}X\,\dot{\{}X\dot{\}}\dot{\}} = \dot{\{}X\dot{\}}\,\dot{\{}X\dot{\}} = \dot{\{}X\dot{\}}^2.$$

5) $$\dot{\{}(X + \dot{\{}X\dot{\}})\,\dot{\{}X\dot{\}}\dot{\}} = (\dot{\{}X\dot{\}} + \dot{\{}X\dot{\}}) \,.\, \dot{\{}X\dot{\}} = 2\,\dot{\{}X\dot{\}}^2.$$

6) $$\dot{\{}(X + \dot{\{}X\dot{\}})^2\dot{\}} = \dot{\{}X^2 + 2X\,\dot{\{}X\dot{\}} + \dot{\{}X\dot{\}}^2\dot{\}} = \\ = \dot{\{}X^2\dot{\}} + 2\,\dot{\{}X\dot{\}}^2 + \dot{\{}X\dot{\}}^2 = \dot{\{}X^2\dot{\}} + 3\,\dot{\{}X\dot{\}}^2.$$

7) $$\dot{\{}(X - \dot{\{}X\dot{\}})^2\dot{\}} = \dot{\{}X^2 - 2X\,\dot{\{}X\dot{\}} + \dot{\{}X\dot{\}}^2\dot{\}} = \\ \dot{\{}X^2\dot{\}} - 2\,\dot{\{}X\dot{\}}^2 + \dot{\{}X\dot{\}}^2 = \dot{\{}X^2\dot{\}} - \dot{\{}X\dot{\}}^2.$$

Z příkladu tohoto jest patrno, že vždy jest $\dot{\{}X^2\dot{\}} > \dot{\{}X\dot{\}}^2$, neboť výraz $(X - \dot{\{}X\dot{\}})^2$ jest vždy kladný.

8) $$\dot{\{}[X + Y - (\dot{\{}X\dot{\}} + \dot{\{}Y\dot{\}})]^2\dot{\}} = \dot{\{}X^2 + Y^2 + \dot{\{}X\dot{\}}^2 + \dot{\{}Y\dot{\}}^2 + \\ + 2XY - 2X\,\dot{\{}X\dot{\}} - 2X\,\dot{\{}Y\dot{\}} - 2Y\,\dot{\{}X\dot{\}} - 2Y\,\dot{\{}Y\dot{\}} + \\ + 2\,\dot{\{}X\dot{\}}\,\dot{\{}Y\dot{\}}\dot{\}}.$$

Upravíme-li pravou stranu na základě předcházejících příkladů, obdržíme konečně:

$$\dot{\{}[X + Y - (\dot{\{}X\dot{\}} + \dot{\{}Y\dot{\}})]^2\dot{\}} = \dot{\{}X^2\dot{\}} + \dot{\{}Y^2\dot{\}} - \dot{\{}X\dot{\}}^2 - \dot{\{}Y\dot{\}}^2.$$

9) Budiž

$$\Omega = \Sigma\,(X_k - \dot{\{}X_k\dot{\}}),$$

vyhledati jest

$$\dot{\{}\Omega^2\dot{\}}.$$

Řešení:

$$\dot{\{}\Omega^2\dot{\}} = \dot{\{}\Sigma\,(X_k - \dot{\{}X_k\dot{\}})^2\dot{\}} = \dot{\{}\Sigma\,(X_k^2 - 2\,X_k\,\dot{\{}X_k\dot{\}} + \dot{\{}X_k\dot{\}}^2)\dot{\}} =$$
$$= \Sigma\,\dot{\{}X_k^2 - 2\,X_k\,\dot{\{}X_k\dot{\}} + \dot{\{}X_k\dot{\}}^2\dot{\}},$$

poněvadž

$$\dot{\{}X_k\,\dot{\{}X_k\dot{\}}\dot{\}} = \dot{\{}X_k\dot{\}}^2,$$

jest konečně

$$\dot{\{}\Omega^2\dot{\}} = \Sigma\,(\dot{\{}X_k^2\dot{\}} - \dot{\{}X_k\dot{\}}^2).$$

Z důvodů uvedených u příkladu 7) platí všeobecně nerovnina

$$\Sigma\,\dot{\{}X_k^2\dot{\}} > \Sigma\,\dot{\{}X_k\dot{\}}^2.$$

§ 11. Tři věty mathematické.

V tomto odstavci podáme tři věty mathematické, jež jsou průpravou k důkazu rozšířené *věty Bernoulliho*, o níž pojednáme v následujícím odstavci § 12.

A. Věta Markovova.

Budiž $\dot{\{}X\dot{\}}$ *mathem. naděje veličiny* X, *které přísluší systém vesměs kladných podle velikosti uspořádaných čísel*

$$x_1,\ x_2, \ldots .\ x_n$$

o pravděpodobnostech

$$p_1,\ p_2, \ldots .\ p_n$$

a budiž dále $\lambda > 1$ *libovolně velké předem dané číslo, potom pravděpodobnost nerovniny*

$$x \leqq \lambda^2\,\dot{\{}X\dot{\}}$$

jest větší nežli

$$1 - \frac{1}{\lambda^2}.$$

Důkaz. V systému hodnot veličiny X jsou zřejmě čísla hovící jednak relaci

$$x_k \leqq \lambda^2\,\dot{\{}X\dot{\}}, \qquad \text{pro } k = 1, 2, \ldots r$$

a kromě toho čísla

$$x_k > \lambda^2 \dot{\{}X\dot{\}}, \qquad \text{pro } k = r+1, \dots n.$$

Pravděpodobnost prvých označme P a pravděpodobnost druhých Q, takže jest

$$P + Q = 1,$$

kde podle věty o sčítání pravděpodobností

$$P = p_1 + p_2 + \dots + p_r,$$
$$Q = p_{r+1} + p_{r+2} + \dots + p_n.$$

Podle definice jest

$$\dot{\{}X\dot{\}} = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n$$

a ježto podle předpokladu součiny $x_k p_k$ jsou vesměs kladnými, jest

$$\dot{\{}X\dot{\}} > p_{r+1} x_{r+1} + \dots\dots + p_n x_n,$$

neboť celek jest vždy větší než jeho část. Položíme-li nyní

$$p_{r+1} x_{r+1} + \dots + p_n x_n = \xi (p_{r+1} + p_{r+2} + \dots + p_n) = \xi Q,$$

tedy

$$\dot{\{}X\dot{\}} > \xi Q,$$

kdež

$$\xi = \frac{p_{r+1} x_{r+1} + \dots + p_n x_n}{p_{r+1} + \dots + p_n}$$

a jest tudíž číslem obsaženým v intervalu čísel $x_{r+1}, \dots x_n$, pro něž jednotlivě platí nerovnina

$$x_k > \lambda^2 \dot{\{}X\dot{\}},$$

bude i

$$\xi > \lambda^2 \dot{\{}X\dot{\}}.$$

Násobíme-li tuto nerovninu Q, obdržíme

$$Q \xi > \lambda^2 \dot{\{}X\dot{\}} Q.$$

Jak svrchu dokázáno platí však relace

$$\dot{\{}X\dot{\}} > \xi Q,$$

jest proto i

$$\dot{\{}X\dot{\}} > \xi Q > \lambda^2 \dot{\{}X\dot{\}} Q$$

a tím spíše

$$\dot{\{}X\dot{\}} > \lambda^2 \dot{\{}X\dot{\}} Q$$

čili

$$1 > \lambda^2 Q.$$

což značí

$$\dot{(}X \leq \lambda^2 \dot{\{}X\dot{\}}\dot{)} > 1 - \frac{1}{\lambda^2} \qquad q.e.d.$$

Názorněji a všeobecněji lze vysloviti větu Markovovu takto: Je-li X závislou veličinou na náhodě a kladnou, t. j. schopnou nabývati podle zákona pravděpodobnosti vždy jen kladných číselných hodnot a $\dot{\{}X\dot{\}}$ její mathematickou nadějí (neb jinou střední hodnotou schopnou alespoň formálně interpretace jako mathematické naděje), potom jest mathematická pravděpodobnost existence nerovniny

$$x < \lambda^2 \dot{\{}X^2\dot{\}}$$

větší než $1 - \frac{1}{\lambda^2}$.

Abychom to objasnili konkrétním příkladem, buďtež

$$x_1,\ x_2, \ldots x_n$$

hodnoty neznámé veličiny X. Utvořme arithmetický průměr x_0 a vyhledejme si t. zv. zdánlivé chyby

$$\Delta_k = x_k - x_0 \qquad k = 1, 2, \ldots n.$$

Tak zvaná střední chyba m jest pak dána výrazem

$$m^2 = \frac{\Sigma \Delta_k^2}{n - 1}.$$

Vyhledejme si nyní pravděpodobnost, že Δ_k^2 jest menší než $\lambda^2 m^2$. Věta Markovova praví, že pravděpodobnost ta jest větší než $1 - \frac{1}{\lambda^2}$.

B. I. Věta Čebyševova.

Nechť veličiny $X_1, X_2, \ldots X_n$ jsou na sobě nezávislými a λ opět libovolné předem dané číslo větší jednotky, potom pravděpodobnost nerovniny

$$\Sigma \dot{\{}X\dot{\}} - \lambda \sqrt{\Sigma (\dot{\{}X^2\dot{\}} - \dot{\{}X\dot{\}}^2)} < \Sigma X \leq \Sigma \dot{\{}X\dot{\}} + \lambda \sqrt{\Sigma (\dot{\{}X^2\dot{\}} - \dot{\{}X\dot{\}}^2)}$$

jest větší než

$$1 - \frac{1}{\lambda^2}.$$

Důkaz. Zde patrna jest vhodnost zavedené symboliky, která umožňuje viděti v této větě vlastně jen modifikovanou větu Markovovu.

Položme

$$\Omega = \Sigma (X - \dot{\{}X\dot{\}})$$

a vyhledejme $\dot{\{}\Omega^2\dot{\}}$ (viz př. 9) § 10), obdržíme

$$\dot{\{}\Omega^2\dot{\}} = \Sigma (\dot{\{}X^2\dot{\}} - \dot{\{}X\dot{\}}^2).$$

Z aplikace věty Markovovy na výraz Ω^2 plyne pak:

$$\dot{(}\Omega^2 \leqq \lambda^2 \dot{\{}\Omega^2\dot{\}}\dot{)} > 1 - \frac{1}{\lambda^2},$$

což značí, že nerovnost

$$\Omega^2 \leqq \lambda^2 \dot{\{}\Omega^2\dot{\}}$$

platí s pravděpodobností větší než $1 - \frac{1}{\lambda^2}$. Odmocnění dává nám dále vztahy:

$$\Omega \leqq +\lambda \sqrt{\dot{\{}\Omega^2\dot{\}}},$$
$$\Omega > -\lambda \sqrt{\dot{\{}\Omega^2\dot{\}}},$$

takže

$$-\lambda \sqrt{\dot{\{}\Omega^2\dot{\}}} < \Omega \leqq +\lambda \sqrt{\dot{\{}\Omega^2\dot{\}}}.$$

Dosadíme-li za Ω a $\dot{\{}\Omega^2\dot{\}}$ svrchu uvedené hodnoty, obdržíme větu Čebyševovu.

C. II. Věta Čebyševova.

(Čebyševova formulace theorému Bernoulliho.)

Pro nezávislé veličiny X_k ($k = 1, 2, \ldots n$) nechť platí nerovnost

$$\dot{\{}X_k{}^2\dot{\}} \leqq a,$$

kde a jest libovolné kladné číslo; potom pravděpodobnost, že arithmetický průměr veličin X_k jest přibližně rovný arithmetickému průměru jich mathematických nadějí, jest libovolně blízká jistotě, vzrůstá-li jen počet veličin X_k neomezeně.)*

---

*) Rozšíření této formulace pro závislé veličiny X_k podal Markov v pojednáních math.-fysikální společnosti na universitě v Kazani.

Důkaz. Buďtež opět $\lambda > 1$ a μ dvě libovolná kladná čísla a položme

$$\Omega = \Sigma (X_k - \{X_k\}),$$

potom pravděpodobnost nerovniny

$$-\mu < \frac{\Omega}{n} < +\mu$$

jest větší než $1 - \frac{1}{\lambda^2}$, volíme-li jen číslo n tak velké, že

$$\lambda \sqrt{\frac{a}{n}} < \mu.$$

Větu Čebyševovu lze totiž psáti ve tvaru

$$-\lambda \sqrt{\{\Omega^2\}} < \Omega \leq +\lambda \sqrt{\{\Omega^2\}}$$

čili

$$-\frac{\lambda}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{\{\Omega^2\}}{n}} < \frac{\Omega}{n} \leq +\frac{\lambda}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{\{\Omega^2\}}{n}},$$

podle předpokladu jest však

$$\{X_k^2\} < a,$$

proto tím spíše i

$$\frac{\{\Omega^2\}}{n} = \frac{\Sigma (\{X_k^2\} - \{X_k\}^2)}{n} < a$$

a

$$\frac{\lambda}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{\{\Omega^2\}}{n}} < \frac{\lambda}{\sqrt{n}} \sqrt{a},$$

takže můžeme psáti

$$-\frac{\lambda}{\sqrt{n}} \sqrt{a} < \frac{\Omega}{n} < +\frac{\lambda}{\sqrt{n}} \sqrt{a}$$

aneb vzhledem k výše uvedené nerovnině

$$-\mu < \frac{\Omega}{n} < +\mu.$$

Poněvadž můžeme při vzrůstajícím n voliti μ libovolně malé, platí věta, že

$$\lim_{n=\infty} \frac{\Omega}{n} = 0$$

čili

$$\lim_{n=\infty} \left(\frac{1}{n} \Sigma X_k - \frac{1}{n} \Sigma \{\dot{X}_k\} \right) = 0.$$

Při dostatečně velkém n lze tudíž s mathematickou pravděpodobností libovolně blízkou jednotce očekávati, že i rozdíl mezi arithmetickým průměrem na sobě nezávislých veličin X_k a jich mathematických nadějí stane se libovolně malým.

§ 12. Theorém Poissonův.

Podávajíce theorémy, jež nesou jméno *Bernoulliho* a jednají o pokusech opětovaných předpokládali jsme, že pravděpodobnosti p a q se během pokusů nemění, na př. vytaženou kouli vkládali jsme opět do osudí a t. d. Dejme tomu, že však vytaženou kouli do osudí již nevložíme, tím mění se ovšem i situace v osudí a s ní veličiny p a q od pokusu k pokusu. S problémy toho druhu zabýval se prvý *Poisson* a proto označují se obvykle jeho jménem.

Budiž opět

p pravděpodobnost zjevu A

a q pravděpodobnost zjevu *non* A,

takže jest

$$p + q = 1.$$

Zjev A jest buď existentní (vytáhli jsme na př. bílou kouli) aneb ne.

Pokládejme prvý případ za výhru 1 a druhý za prohru 0, potom naše hra X jest schopna dvou hodnot

$$x_1 = 1,\ x_2 = 0,$$

jichž pravděpodobnosti, nyní měnící se od pokusu k pokusu, nazveme

$$p_i,\ q_i;$$

proto bude mathematická naděje výhry, t. j. vytažení bílé koule podle definice

$$\{\dot{X}_i\} = p_i x_1 + q_i x_2 = p_i \cdot 1 + q_i \cdot 0 = p_i$$

a podobně jest

$$\{\dot{X}_i^2\} = p_i \cdot 1^2 + q_i \cdot 0^2 = p_i.$$

Poněvadž p_i může býti maximálně rovno 1, platí nerovnost

$$\{X_i^2\} \leqq 1,$$

takže můžeme zde aplikovati *druhou větu Čebyševovu*. Učiníme-li s pokusů a máme-li a existentních případů, jest

$$\Sigma X_i = a.$$

Dále jest hodnota

$$\Sigma \{X_i\} = \Sigma p_i = p^{(1)} + p^{(2)} + p^{(3)} + \ldots + p^{(a)},$$

t. j. rovna součtu všech p_i, při nichž vytažena byla koule bílá.

Podle *druhé věty Čebyševovy* platí však pro

$$s > \frac{\lambda^2}{\mu^2} \qquad (\lambda < 1)$$

nerovnost

$$\left(-\mu < \frac{a}{s} - \frac{p^{(1)} + p^{(2)} + \ldots + p^{(a)}}{s} < +\mu\right) > 1 - \frac{1}{\lambda^2},$$

v níž lze μ voliti libovolně malé a λ libovolně velké.

Obdržíme tak *větu*

$$\frac{a}{s} \doteq \frac{p^{(1)} + p^{(2)} + p^{(3)} + \ldots + p^{(a)}}{s},$$

která pro

$$p_1^{(1)} = p^{(2)} = p^{(3)} = \ldots = p^{(a)} = p$$

přechází ve *větu Bernoulliho* a kterou lze slovně formulovati takto:

Je-li počet pokusů s *dostatečně veliký, potom lze s pravděpodobností libovolně aproximující jednotku očekávati, že absolutní hodnota rozdílu*

$$\frac{a}{s} - \frac{p^{(1)} + p^{(2)} + p^{(3)} + \ldots + p^{(a)}}{s}$$

bude menší libovolně malé veličiny μ.

Větu Poissonovu, která jest zevšeobecněním v § 5. odvozené věty Laplaceovy, možno na základě toho formulovati následovně:

Konáme-li dostatečně velký počet (s) *pokusů, při nichž jsou jen zjevy A a non A možny a každému pokusu i odpovídají jiné pravděpodobnosti* p_i *a* q_i, *potom lze s mathematickou pravděpodobností*

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\gamma} e^{-x^2}\, dx = \Phi(\gamma)$$

očekávati, že číslo a*, udávající počet zjevů* A*, bude vymezeno nerovností*

$$ps - \gamma\sqrt{2s\,\Sigma p_i q_i} < a < ps + \gamma\sqrt{2s\,\Sigma p_i q_i},$$

kde

$$p = \frac{\Sigma p_i}{s}, \quad q = \frac{\Sigma q_i}{s}.$$

§ 13. Theorie rentability a risika.

Theorii rentability a risika*) budeme studovati pomocí theorie *spravedlivých her*, jež bude nám tím, čím bylo *osudí* pro formulaci theorémů mathematické pravděpodobnosti. Proto budou naše úvahy představovati vlastně theorii *konkrétní rentability a risika*, tedy na př. takových risik, které lze měřiti mírou mathematické pravděpodobnosti. Definujme nejprve *spravedlivou hru*. Při *spravedlivé hře* jest součet sázek s roven výhře v. Platí proto rovnice

$$\Sigma s = v.$$

Hra spravedlivá jest dále normována předpoklady mathem. pravděpodobnosti, takže pro dostatečně velký počet her platí *zákon velkých čísel*. Z toho plyne, že *sázka při spravedlivé hře má se rovnati výhře*, již na základě mathematické pravděpodobnosti lze očekávati, co přeloženo v mluvu našich symbolů skytá rovnici

$$s = v\,(\dot{v}) = \{\dot{v}\}.$$

Příklad.

Hráči A a B hrají o vklad 60 K kostkou. Padne-li číslo 1 vyhrává A, padne-li nějaké jiné vyhraje B. Kolik musí vsaditi A a kolik B. Označme jich sázky s_A a s_B. Podle výše uvedené rovnice jest:

$$s_A + s_B = 60 = v.$$

Poněvadž pravděpodobnosti výhry jsou

$$p_A = (\dot{v})_A = \frac{1}{6}, \qquad p_B = (\dot{v})_B = \frac{5}{6},$$

*) Viz: *H. Broggi:* Versicherungsmathematik (1911) p. 313 *K. Wagner:* Das Problem vom Risiko in der Lebensversicherung, Jena 1898.

jest konečně

$$s_A = v\,\overset{\bullet\;\bullet}{(v)}_A = 60 \,.\, \frac{1}{6} = 10,$$

$$s_B = v.\overset{\bullet\;\bullet}{(v)}_B = 60 \,.\, \frac{5}{6} = 50.$$

Aby hra byla spravedlivá, musí proto vklad hráče A obnášeti 10 korun a vklad hráče B 50 korun. Hraje-li se dostatečně dlouho, nevyhrává ani A ani B.

Výhra jednotlivé hry po odečtení sázky jest

$$v_A = v - s_A,$$

a nazývá se *čistou výhrou.*

Platí rovnice (ex definitione symbolu $\overset{\bullet\;\bullet}{\{\;\}}$)

$$\overset{\bullet\;\bullet}{\{v_A\}} = (v - s_A)\, p_A$$

a poněvadž

$$s_A = v\,\overset{\bullet\;\bullet}{(v)}_A = v\, p_A,$$

bude i

$$\overset{\bullet\;\bullet}{\{v_A\}} = v\, p_A\, p_B.$$

Z této rovnice plyne bezprostředně

$$\overset{\bullet\;\bullet}{\{v_A\}} = \overset{\bullet\;\bullet}{\{v_B\}}.$$

Spravedlivou hru lze podle toho *definovati jako hru stejné mathematické naděje čisté výhry.* Tak zvaná *pravděpodobná čistá výhra* jest dána rovnicí

$$v'_A = v\, p_A - s_A,$$

jest to tedy obnos, který nám zůstane, odečteme-li sázku s_A od pravděpodobné výhry $v\, p_A$. Poněvadž p_A leží v mezích 0 a 1, jest

$$max.\, v'_A = v - s_A = v - p_A\, v = q_A \,.\, v$$
$$min.\, v'_A = - s_A = - p_A\, v,$$

takže platí nerovnost

$$- p_A\, v < v'_A < q_A\, v.$$

Čím užší jsou tyto meze, tím méně riskantní je hra.

Platí věta, že *naděje výhry hráče A jest* zároveň *očekávaným risikem hráče B* a naopak. Abychom to dokázali, označme risiko písmenou R, bude

$$\overset{\bullet\;\bullet}{\{v_A\}} = R_B = v\, p_A\, p_B = v\, q_B\, p_B;$$

podobně jest

$$\{v_B\} = R_A = q_A \, s_A.$$

Kromě uvažovaného *absolutního risika* mluví se někdy o *relativním risiku*, které definujeme vzorci

$$r_A = \frac{R_A}{s_A} = q_A,$$

$$r_B = \frac{R_B}{v} = p_B \, q_B$$

a vyjadřujeme v procentech, tedy

$$r_A \% = 100 \, q_A \%,$$

$$r_B \% = 100 \, p_B \, q_B \%.$$

Uvažujme nyní následující hru. Budiž p mathem. pravděpodobnost nějakého zjevu, jehož objevení jest normováno zákony mathem. pravděpodobnosti a předpokládejme hru dvou hráčů A a B, při které prvý t. j. A v případě objevení se jistého zjevu zaplatí druhému hráči, t. j. B částku v.

Máme zde především pro sázku s_B, kterou B musí platiti,

$$s_B = p \, v.$$

Mathematické risiko prohry pro A jest dále

$$R_A = p \, (v - s_B).$$

Hra ať jest spravedlivou, takže risiko ztráty obou hráčů jest stejné

$$R_A = p \, (v - s_B) = p \, (1 - p) \, v = p \, q \, v = q \, s_B = R_B.$$

Předpokládejme nyní, že hráč B, aby se uchránil alespoň částečně od možných ztrát při hře, zaplatí třetí osobě C pojistnou premii P_1, v důsledku které, prohraje-li, obdrží od C sázku s_B zpět.

Jeho nové risiko prohry obdržíme, píšeme-li poslední rovnici

$$R_B = p \, (v - s_B) = q \, s_B$$

ve tvaru

$$R'_B = p \, [v - (s_B + P_1)],$$

neboť platební povinnost s_B hráče B zvětšila se nyní o premii P_1.

Obnos premie rovná se ovšem risiku ztráty, máme tedy

$$P = R_B = q \, s_B$$

a proto bude

$$R'_B = p\,[v - s_B - R_B] = q^2\, s_B.$$

B obdrží v případě prohry ovšem jen sázku s_B a nikoli však pojistnou premii P_1 zpět. Proti tomu mohl by se opět pojistiti zaplacením premie

$$P_2 = R'_B = q^2\, s_B,$$

čímž by se jeho risiko ztráty zmenšilo o

$$R''_B = q^3\, s_B \quad \text{a t. d.},$$

takže hráč, aby se úplně zachránil od prohry, musel by platiti premii

$$P = P_1 + P_2 + P_3 + \ldots = s_B\,(q + q^2 + q^3 + \ldots) = \frac{s_B\, q}{1 - q} =$$

$$= s_B \frac{q}{p} = v \,.\, q$$

a to jest skutečně *maximální risiko* prohry pro hráče B, jak v předcházející úvaze bylo dokázáno.

Naše úvahy můžeme všeobecněji podati takto. Buďtež

$$p_k = (\dot{F}_k) \quad \text{pro } k = 1, 2, \ldots n$$

pravděpodobnosti vyskytnutí se jednoho zjevu F_k z n jedině možných případů, takže platí rovnice

$$\sum_{k=1}^{n} p_k = 1.$$

Předpokládejme dále, že v případě vyskytnutí se zjevu F_k osoba A má platiti osobě B určitou sumu a_k a osoba B jí na ten účel poskytuje titulem sázky obnos b_k, potom při spravedlivé hře musí se střední hodnoty výplat, t. j.

$$\{\dot{A}\} = \sum_1^n p_k\, a_k,$$

$$\{\dot{B}\} = \sum_1^n p_k\, b_k,$$

sobě rovnati, neboť ze spravedlivé hry nemá míti ani A ani B užitek a to jest možno jen tehdy, je-li risiko výplat u obou stejné. Platí proto rovnice

$$\dot{\{}A\dot{\}} - \dot{\{}B\dot{\}} = \sum_{1}^{n} p_k (a_k - b_k) = 0,$$

která charakterisuje *risiko spravedlivé hry.* Součet ten skládá se z kladných a záporných členů v počtu i resp. j, $(i + j = n)$.

Pišme tedy

$$\sum_{k=1}^{i} p_k (a_k - b_k) - \sum_{k'=1}^{j} p_{k'} (b_{k'} - a_{k'}) = 0,$$

bude pak

$$\sum_{k=1}^{i} p_k (a_k - b_k) = \sum_{k'=1}^{j} p_{k'} (b_{k'} - a_{k'}),$$

kde

$$a_k > b_k \qquad\qquad b_{k'} > a_{k'}$$

Prvá hodnota

$$R_A = \sum_{k=1}^{i} p_k (a_k - b_k) \qquad a_k > b$$

nazývá se *risikem A vůči B* a podobně

$$R_B = \sum_{k'=1}^{j} p_{k'} (b_{k'} - a_{k'}) \qquad b_{k'} > a_{k'}$$

risikem B vůči A. Znamenáme-li absolutní hodnoty symbolem || jest dále

$$R = \frac{1}{2} \sum_{1}^{n} p_k \; a_k - b_k$$

tak zvaným *mathematickým risikem hry.* Dále nazýváme hodnotu

$$M = \sqrt{\sum_{1}^{n} p_k (a_k - b_k)^2}$$

středním risikem hry. Poslední dvě veličiny jsou důležity pro ***mathematickou charakteristiku hry.***

Posouzení rentability podniku (hry), který závisí na náhodě, jest možno jen s větší neb menší pravděpodobností. Pro podniky, jichž existenční podmínky odpovídají normám mathematické pravděpodobnosti, jak jest tomu na př. u spravedlivých her, lze prosperitu vyjádřiti stanovením risika. Definujeme:

Podnik jest rentovný, riskantní aneb nejistý podle toho, je-li mathematická naděje přírůstku kapitálu podnikatele kladná, záporná neb rovna nule.

Příklad 1.

A a B hrají hru bez remis. B sází na vytáhnutí koule s čísly 1 až 90 obnos 10 korun. Vyjde-li některé číslo mimo 1 a 90, nevyhrává B nic; vyjde-li však 1 neb 90, zaplatí A hráči B 1000 korun.

Zde jest

$$R_A = \{\dot{A}\} = \frac{88}{90} \cdot 10 - \frac{2}{90}(1000 - 10) = -12{\cdot}33$$

a hra není pro A rentovní. Snadno se o tom přesvědčíme, neboť hra není ani spravedlivá.

Sázka spravedlivé hry jest zde

$$s = \frac{2}{90} \cdot 1000 + \frac{88}{90} \cdot 0 = 22{\cdot}22$$

a pro ní

$$R_A = \frac{88}{90} \cdot 22{\cdot}22 - \frac{2}{90}(1000 - 22{\cdot}22) = 0.$$

Sázka 10ti korun jest tudíž nepoměrně malá a hra dostatečně dlouho hraná by hráče A ruinovala. Naopak hráč B mohl by při dostatečně dlouhé hře získati libovolný obnos. — Příklad ten ukazuje, že nutno při hrách a vůbec podnicích založených na principu spravedlivé hry počítati rentabilitu pro každého hráče zvlášť, neboť co jest rentovné pro A, může býti riskantní pro B a naopak. Že by svrchu uvedená hra hráče A ruinovala, lze dokázati i mathematicky.

Neboť podle *druhé věty Čebyševovy* lze totiž při dostatečně velkém počtu pokusů očekávati s mathematickou pravděpodobností blížící se libovolně k jistotě libovolně velký přírůstek kapitálu v případě, když mathematická naděje jest vyjádřena kladným číslem a úplné vyčerpání kapitálu, je-li mathematická naděje záporná. Platí totiž následující *theorém:*

Je-li pro veličiny na sobě nezávislé X_i, jichž počet může býti libovolně zvětšován, vyhověno nerovnostem

$$\{\dot{X_i^2}\} < c, \qquad \{\dot{X}\} > b, \qquad i = 1, 2, \ldots . n$$

kde b a c jsou určitá čísla větší nuly; potom možno n voliti tak, že lze očekávati platnost nerovniny

$$\Sigma X_i > a,$$

s pravděpodobnvstí

$$1 - \frac{1}{\lambda^2}$$

kde jesi opětně $\lambda > 1$ *a* a *značí libovolně velké předem dané kladné číslo.*

Z druhé věty Čebyševovy plyne totiž pro $\{X_i^2\} \leq c$.

$$\left(\frac{\Sigma \{X_n\}}{n} - \mu < \frac{\Sigma X_n}{n} < \frac{\Sigma \{X_n\}}{n} + \mu\right) > 1 - \frac{1}{\lambda^2},$$

je-li jen

$$n > c\,\frac{\lambda^2}{\mu^2},$$

kde λ jest předem dané libovolně velké a μ libovolně malé číslo. Z toho následuje, že

$$\left(\frac{\Sigma \{X_n\}}{n} - \mu < \frac{\Sigma X_n}{n}\right) > 1 - \frac{1}{\lambda^2},$$

jakož i

$$(\Sigma \{X_n\} - \mu\, n < \Sigma X_n) > 1 - \frac{1}{\lambda^2}.$$

Jest tedy co nejméně s touže pravděpodobností

$$\Sigma X_n > \Sigma \{X_n\} - n\,\mu$$

a poněvadž podle předpokladu $\{X\} > b$, tím jest tudíž i

$$\Sigma \{X_n\} > n\,b.$$

Sečtením obou nerovností obdržíme

$$\Sigma X_n + \Sigma \{X_n\} > \Sigma \{X_n\} + n\,b - n\,\mu$$

čili

$$\Sigma X_n > n\,(b - \mu).$$

Poněvadž n může libovolně růsti, ježto pokusy lze konati v libovolném počtu, proto může ΣX_n překročiti každé libovolně velké předem dané číslo a s mathematickou pravděpodobností $1 - \frac{1}{\lambda^2}$, jež se libovolně blíží jistotě, neboť λ jest číslo, které lze zvoliti libovolně velkým. Tím jest však svrchu uvedená věta dokázána. — Mutatis mutandis dokážeme i libovolně velkou

pravděpodobnost vyčerpání kapitálu, je-li mathematická naděje dána číslem záporným. Obtížnější jest již analysa, kdy mathem. naděje přírůstku kapitálu se rovná nule.

Příklad 2.

Jest posouditi následující hry, B sází $3^1/_2$ koruny; hry pak ať jsou:

I. *A zaplatí B tolik korun, kolik padne při vrhu kostkou, tedy s, padne-li 1, 2 s padne-li 2, a t. d.*

II. *A zaplatí za čísla 4, 5, 6 sedm korun, za čísla 1, 2, 3 nic.*

III. *A zaplatí jen za číslo 6 jednadvacet korun a za ostatní čísla 1, 2, 3, 4. 5 nic.*

Hry jsou vesměs spravedlivé, neboť podle vzorce

$$s = \Sigma p_k v_k, \qquad \text{kde } p = \frac{1}{6}$$

jest sázka

$$s_I = \frac{1}{6}[1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6] = 3\tfrac{1}{2},$$

$$s_{II} = \frac{1}{6}[7 + 7 + 7] = 3\tfrac{1}{2},$$

$$s_{III} = \frac{1}{6} \cdot 21 = 3\tfrac{1}{2}$$

Risiko vypočteme podle vzorce

$$R = \Sigma p (v - s), \qquad v > s$$

bude tak

$$\{\dot{A}\} = R_I = \frac{1}{6}[2\tfrac{1}{2} + 1\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}] = \frac{3}{4}, \qquad r_I = 21\tfrac{3}{7}\,\%\ s,$$

$$\{\dot{A}\} = R_{II} = \frac{1}{6}[3\tfrac{1}{2} + 3\tfrac{1}{2} + 3\tfrac{1}{2}] = \frac{7}{4}, \qquad r_{II} = 50\%\ s,$$

$$\{\dot{A}\} = R_{III} = \frac{1}{6}[17\tfrac{1}{2}] = \frac{35}{12}, \qquad r_{III} = 83\tfrac{1}{3}\,\%\ s.$$

Prvá hra má nejmenší risiko, to jest $21\frac{3}{7}\%$ sázky a poslední největší, to jest $83\frac{1}{3}\%$ sázky. Proto jest prvá hra spojena s nejmenším risikem pro hráče *A* a poslední s největším. Pro *B* platí ovšem opak; může-li *B* voliti hru a chce-li voliti pro sebe hru nejrentovnější, bude voliti třetí.

Příklad 3.

V loterii o n losech projektovány jsou výhry:

$$m_k \text{ výher v ceně } V_k, \quad (\text{pro } k = 1, 2, 3, \ldots s),$$

takže na

$$n - \Sigma m_k = n_0$$

nepřipadne žádná výhra. Jaká jest cena losu při spravedlivé hře?

Hra jest spravedlivou, rovná-li se mathematické risiko každého hráče nule. Vyhraje-li hráč V_k korun, potom vyhrál vlastně $V_k - x$ korun, kde x značí cenu jednoho losu. Pravděpodobnost dosíci tuto výhru jest $\frac{m_k}{n}$. Nevyhraje-li hráč nic, jest jeho výhra $-x$ korun a pravděpodobnost toho

$$\frac{n_0}{n} = \frac{n - \Sigma m_k}{n}.$$

Mathematické risiko hry jest ale při spravedlivé hře rovno nule, proto máme

$$r = (V_1 - x)\frac{m_1}{n} + (V_2 - x)\frac{m_2}{n} + \ldots\ldots + (V_s - x)\frac{m_s}{n} - \\ - \frac{n - \Sigma m_k}{n} x = 0,$$

tedy

$$x = V_1 \frac{m_1}{n} + V_2 \frac{m_2}{n} + \ldots. + V \frac{m_s}{n}.$$

Budiž $n = 500$ a výherní tabulka sestavena takto:

$m_1 = 1$ výhra v obnosu $V_1 = 1000$ korun,
$m_2 = 4$ výhry v obnosu $V_2 = 500$ korun,
$m_3 = 10$ výher v obnosu $V_3 = 100$ korun,

potom jest

$$x = 1000 \cdot \frac{1}{500} + 500 \cdot \frac{4}{500} + 100 \cdot \frac{10}{500} = 8 \text{ korun.}$$

Cena losu při spravedlivé hře obnáší tudíž 8 korun.

Příklad ukazuje jasně shodu bezprostředního logického rozumování s výsledky úvah na základě počtu mathematické pravděpodobnosti.

Cena losu rovná se totiž evidentně celému k vylosování určenému obnosu dělenému počtem losů, obdržíme tak

$$\frac{1000 + 4 \,.\, 500 + 10 \,.\, 100}{500} = 8$$

jako prve.

Zde naivní výpočet jest kratší, jsou však případy, kdy není tak snadný a potom uplatňuje se počet pravděpodobnosti plně. V dějinách počtu pravděpodobnosti bychom nalezli hojně toho příkladů. — Kdyby cena losu byla větší než 8 korun, řekněme 10 korun, potom nebylo by risiko hráče rovno nulle a hra by byla pro hráče riskantní, t. j. spojená se ztrátou.

Příklad 4.

Malá loterie.

V Janově bylo na počátku 17. století zvykem voliti losem 5 ze 100 senátorů k řízení státu. Benedetto Gentili použil tohoto faktu k zavedení sázek, že ten neb onen bude zvolen. Z toho povstala kol r. 1620 státní loterie, která později i jinde byla zavedena. V Německu udržela se až do roku 1861 a u nás zrušila ji teprve československá republika.

Její složení jest známo. Obsahuje 90 čísel a hraje se na vytažení jednoho až pěti čísel v libovolném pořádku.

Mathem. pravděpodobnost uhádnouti

1 číslo $p_1 = \binom{90}{1} = \frac{5}{1} : \frac{90}{1} = \frac{1}{18}$, (extratto)

2 čísla $p_2 = \binom{90}{2} = \frac{5 \,.\, 4}{1 \,.\, 2} : \frac{90 \,.\, 89}{1 \,.\, 2} = \frac{2}{801}$, (ambo)

3 čísla $p_3 = \binom{90}{3} = \frac{5 \,.\, 4 \,.\, 3}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} : \frac{90 \,.\, 89 \,.\, 88}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} = \frac{1}{11748}$, (terno)

4 čísla $p_4 = \binom{90}{4} = \frac{1}{511038}$, (kvaterno)

5 čísel $p_5 = \binom{90}{5} = \frac{1}{43949268}$, (kvinterno).

Při spravedlivé hře měla by tudíž výhra býti

$$18\,s, \quad 400\,s, \quad 11748\,s, \quad 511038\,s \quad \text{a} \quad 43949268\,s,$$

kde s značí sázku. V Rakousku obdržel výherce v prvých třech případech

$$14\,s, \quad 240\,s, \quad 4800\,s,$$

nehledě ku 15% výherní dani. Sázky na kvaterno a kvinterno se nepřijímaly. Nespravedlivost hry leží na bíle dni. Hra má býti vždy spravedlivá, neboť jen její zdanění může býti zdrojem fiskálních příjmů, ale nikdy výnos nespravedlivé hry. Že hra není rentovná pro hráče, ukazuje výpočet mathematického risika. Máme pro

$$\textit{extratto} \quad R = \frac{1}{18}(14\,s - s) - \frac{17}{18}\,s = -\frac{2}{9}\,s,$$

$$\textit{ambo} \quad R = \frac{2}{801}(240\,s - s) - \frac{799}{801}\,s = -\frac{2}{5}\,s,$$

$$\textit{terno} \quad R = \frac{1}{11748}(4800\,s - s) - \frac{11747}{11748} = -\frac{7}{12}\,s$$

čili v procentech sázky okrouhle

$$22\%,\ 40\%,\ 57\%.$$

Nejméně riskantní hra jest v extratto, neboť pravděpodobná ztráta obnáší jen 22% sázky; asi dvakráte tak riskantní jest již hra v ambo, kde lze očekávati při velmi velkém počtu her ztrátu rovnající se 40% sázky a asi třikráte tak riskantní jest hra v terno, neboť očekávaná ztráta obnáší plných 57% sázky.

§ 14. Problémy historické.

A. Problém trvání hry.

(Problem der Spieldauer, la ruine des joueurs, problem of duration of play.)

Hráči A a B mající ***a*** *a* ***b*** *korun hrají o sázku 1 koruny hru bez remis tak dlouho, až jeden vše prohraje. Pravděpodobnost vyhráti jednotlivou hru nechť jest pro A rovna p a tedy pro B rovna* $q = 1 - p$. *Hledá se pravděpodobnost, že hráč A vyhraje.**)

Pravděpodobnost výhry pro A označme při stavu $a = x$ symbolem $w_A(x)$. Hra jest skončena, je-li $x = 0$, neboť potom A vše prohrál anebo při stavu $x = a + b$, kdy prohrává B. Bude tudíž

$$w_A(o) = 0, \qquad w_A(a + b) = 1.$$

*) Viz pojednání *K. Vorovky* v Čas. č. math. 1912. Str. 562. O zajímavé historii tohoto problému viz: *Czuber*, Jahresbericht der d. Math. Ver. 1899. Str. 37. Při prvém studiu doporučuje se § 14. vynechati a přejíti ihned k § 15. Problémy zde uvedené jsou totiž ponejvíce jen historicky a mathematicky zajímavé.

Uvažujme nyní stav při hře po $a = x$. Vyhrává-li A tuto hru, čehož pravděpodobnost jest p, potom $a = x + 1$ a pravděpodobnost výhry pro A jest $w_A(x + 1)$; prohrává-li hru, čehož pravděpodobnost jest q, bude $a = x - 1$ a pravděpodobnost výhry pro A rovna $w_A(x - 1)$; máme proto

$$w_A(x) = p\, w_A(x + 1) + q\, w_A(x - 1),$$

což jest differenční rovnice, jejíž charakteristika

$$\lambda = p\lambda^2 + q,$$

má dva kořeny, jež vzhledem ke vztahu

$$p + q = 1$$

jsou

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = \frac{q}{p}. \qquad (p \neq q)$$

Integrál svrchu uvedené differenční rovnice jest proto

$$w_A(x) = c_1 + c_2 \left(\frac{q}{p}\right)^x.$$

Ke stanovení konstant použijeme rovnic

$$w_A(o) = c_1 + c_2 \left(\frac{q}{p}\right)^0 = c_1 + c_2 = 0,$$

$$w_A(a + b) = c_1 + c_2 \left(\frac{q}{p}\right)^{a+b} = 1,$$

z nichž plyne

$$c_1 = -c_2 = \frac{p^{a+b}}{p^{a+b} - q^{a+b}}.$$

Jest proto

$$w_A(x) = \frac{p^{a+b}}{p^{a+b} - q^{a+b}} \left(1 - \frac{q^x}{p^x}\right)$$

čili

$$w_A(x) = \frac{p^{a+b-x}(p^x - q^x)}{p^{a+b} - q^{a+b}}.$$

V případě, kdy $p = q$, jest podle známých vět o integraci differenciálních rovnic

$$w_A(x) = c_1 + c_2 x$$

Určíme-li konstanty podobně jako svrchu, obdržíme

$$w_A(x) = \frac{x}{a+b}.$$

Jest tudíž pravděpodobnost výhry při počátku, t. j. při stavu $x = a$ při $p \gtrless q$

$$w_A(a) = \frac{p^b(p^a - q^a)}{p^{a+b} - q^{a+b}}$$

a při $p = q$

$$w_A(a) = \frac{a}{a+b}.$$

Pravděpodobnost výhry pro hráče B jest při $p = q$ rovna

$$w_B(b) = \frac{b}{a+b}$$

a poněvadž jeden z nich vyhráti musí, jest

$$w_A(a) + w_B(b) = 1$$

shodně s algorithmem mathematické pravděpodobnosti. Z obou rovnic plyne

$$\frac{w_A(a)}{a} = \frac{w_B(b)}{b} = \frac{w_A(a) + w_B(b)}{a+b} = \frac{1}{a+b}$$

a z toho pravidlo: je-li hra spravedlivá, t. j. $p = q$, potom pro A platí úměra

$$\frac{(\dot{\text{výhry}})}{(\dot{\text{prohry}})} = \frac{a}{b}$$

a čili

$$(\dot{\text{výhry}}) \sim \frac{1}{b} \quad \text{a} \quad (\dot{\text{prohry}}) \sim \frac{1}{a}.$$

Dále máme pro $b \gg a$

$$w_B(b) = \frac{b}{a+b} = \frac{1}{1+\dfrac{a}{b}} \doteq 1.$$

Jest proto výhra pro ***B*** *a tím i prohra pro* ***A*** *téměř jistá, překročuje-li hodnota* ***b****, kterou vyhráti míní, značně jeho kapitál* ***a****.*

K těmto důsledkům dospějeme i přímo pomocí pojmu mathem. naděje $\{\dot{}\dot{}\}$.

Podle definice jest

$$\{\dot{A}\dot{\}} = \Sigma\, p_i\, x_i,$$

kde

$$p_1 = w_A(a), \qquad p_2 = w_B(b),^{*)}$$
$$x_1 = b, \qquad x_2 = -a,$$

tedy

$$\{\dot{A}\dot{\}} = w_A(a) \,.\, b - w_B(b) \,.\, a$$

a poněvadž pro spravedlivou hru jest

$$\{\dot{A}\dot{\}} = 0,$$

přicházíme opět k rovnici

$$\frac{w_A(a)}{a} = \frac{w_B(b)}{b},$$

výše uvedené.

B. Moivreův problém.**)

(Rencontrespiel, Jeu du Treize, game of treize.)

*Osudí nechť obsahuje **n** koulí označených čísly 1 až **n**, které jednu po druhé vytahujeme. Jaká jest pravděpodobnost, že alespoň jedna z nich bude vytažena v tahu odpovídajícímu jejímu číslu?*

Počet všech možných pořadí rovná se počtu všech permutací z n elementů, t. j. $n!$. Abychom vyhledali počet všech příznivých tahů, určeme především počet všech nepříznivých, ve kterých tedy žádná koule není tažena v tahu odpovídajícím jejímu číslu.

Je-li i číslem, které jest jediné na místě, potom počet permutací v nichž i *není na místě*, rovná se

$$n\,! - (n-1)!.$$

Abychom to nahlédli, uvažujme, jak tvoříme permutace. Předpokládejme $n-1$ elementů, potom bude počet permutací $n-1!$. Přistoupí-li k tomu n-té číslo jako nový člen, potom připsání jeho ke stávajícím permutacím na konci, poskytne nám počet

*) Pravděpodobnost $w_A(-a)$ jest rovna $w_B(b)$, neboť aby prohrál A, musí vyhráti B.

**) Literatura a dějiny u Czubera (l. c.). Str. 44.

těch permutací, v nichž n-té číslo jest na svém místě a proto jest $(n-1)!$ počet těch permutací, kde n jest na svém místě a

$$n! - (n-1)!$$

počet těch, kde není na svém místě. Považujeme-li dvě čísla na svých místech stojící za jeden element, bude očividně

$$(n-1)! - (n-2)!$$

počet případů v $n!$ permutacích, ve kterých dvě čísla nejsou na místě a t. d. Máme proto

$$n! - 2(n-1)! + (n-2)!$$

případů, kdy ani jedno ani dvě čísla nejsou na místě. Podobně obdržíme pro tři čísla

$$n! - 3(n-1)! + 3(n-2)! - (n-3)! \text{ a t. d.}$$

Tak dospějeme indukcí ke vzorci pro r čísel

$$n! - \binom{r}{1}(n-1)! + \binom{r}{2}(n-2)! - \ldots\ldots + (-1)^r (n-r)!$$

a dělíme-li jej počtem všech možných případů, t. j. $n!$, obdržíme vzorec

$$(\text{non } r) = 1 - \binom{r}{1}\frac{1}{n} + \binom{r}{2}\frac{1}{n(n-1)} - \ldots\ldots + (-1)^r \frac{1}{n(n-1)\ldots(n-r+1)}.$$

Tím stanovena jest pravděpodobnost, že r *koulí jest na nesprávném místě* a *ostatní buď na správném aneb nesprávném.* Další řešení provedeme takto:

Budiž

ε_1 . . . počet případů, kdy jedna koule označená číslem a byla v a-tém tahu tažena,

e_1 . . . počet případů, kdy se to nestalo, bude

$$e_1 + \varepsilon_1 = n!,$$

tedy

$$e_1 = n! - \varepsilon_1 = n! - (n-1)!.$$

Je-li dále symbolicky

$\varepsilon_1 \varepsilon_2$ . . . . počet tahů, v nichž byly jistě dvě koule na místech jim příslušných taženy,

$e_1 e_2 \ldots$ počet tahů ve kterých to jistě nenastalo a

$e_1 \varepsilon_2 \ldots$ počet tahů, kdy jedna jest jistě na svém místě a druhá nikoliv.

Co se týče jiných koulí, mohou býti na příslušném místě anebo ne.

Máme proto v důsledku předešlých úvah

$$\varepsilon_i = (n-1)!,$$
$$\varepsilon_i \varepsilon_j = (n-2)!,$$
$$\varepsilon_i \varepsilon_j \ldots \varepsilon_s = (n-t)!,$$

kdež t jest počet indexů $i, j, \ldots s$. Dále jest samozřejmě

$$e_1 = e_1 e_2 + e_1 \varepsilon_2,$$

neboť počet tahů, při nichž jedna koule nebyla na místě, rovná se počtu tahů, při kterých dvě koule nebyly na místě **více** počet tahů, při nichž jedna byla na místě a druhá nikoliv. Z této rovnice plyne

$$e_1 e_2 = e_1 - e_1 \varepsilon_2.$$

Stejným postupem obdržíme

$$e_1 e_2 e_3 = e_1 e_2 - e_1 e_2 \varepsilon_3$$

a všeobecně, položíme-li symbolicky

$$e_1 e_2 e_3 \ldots e_r = \varphi(r)_n,$$

rovnici

$$\varphi(r+1)_n = \varphi(r)_n - \varphi(r)_n \varepsilon_{r+1}.$$

Jest však

$$\begin{aligned}\varphi(2)_n &= n! - 2(n-1)! + (n-2)! = \\ &= [n! - (n-1!)] - [(n-1)! - (n-2)!] = \\ &= \varphi(1)_n - \varphi(1)_{n-1} \\ \varphi(3)_n &= \varphi(2)_n - \varphi(2)_{n-1} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi(r+1)_n &= \varphi(r)_n - \varphi(r)_{n-1}\end{aligned}$$

a proto také vzhledem k rovnici pro $\varphi(r+1)_n$

$$\varphi(r)_n \varepsilon_{r+1} = \varphi(r)_{n-1}.$$

Poněvadž všeobecně $\varepsilon_i = \varepsilon_j$, plyne z uvedené rovnice dále

$$\varphi(r)_n \varepsilon_k = \varphi(r)_{n-1}.$$

Z poslední rovnice obdržíme vztahy

$$\varphi(1)_n \varepsilon_3 = \varphi(1)_{n-1},$$
$$\varphi(1)_{n-1} \varepsilon_2 = \varphi(1)_{n-2},$$

jichž znásobením a zkrácením plyne ihned

$$\varphi(1)_n \varepsilon_2 \varepsilon_3 = \varphi(1)_{n-2}.$$

Platí dále rovnost

$$\varphi(2)_n = \varphi(1)_n - \varphi(1)_{n-1}$$

a násobíme-li ji $\varepsilon_2 \varepsilon_3$, bude

$$\varepsilon_2 \varepsilon_3 \varphi(2)_n = \varepsilon_2 \varepsilon_3 \varphi(1)_n - \varepsilon_2 \varepsilon_3 \varphi(1)_{n-1}$$
$$= \varphi(1)_{n-2} - \varphi(1)_{n-3} = \varphi(2)_{n-2},$$

tudíž

$$\varphi(2)_n \varepsilon_2 \varepsilon_3 = \varphi(2)_{n-2}.$$

Stejným postupem obdržíme

$$\varphi(r)_n \varepsilon_k \varepsilon_l = \varphi(r)_{n-2}$$

a snadným zevšeobecněním

$$\varphi(r)_n \varepsilon_k \varepsilon_l \ldots \varepsilon_q = \varphi(r)_{n-s},$$

kde s rovná se počtu veličin ε_i levé strany rovnice. Tím stanoven jest počet případů, ve kterých r *koulí není na pravém místě a ostatních* $n - r$ *koulí bylo na pravém místě taženo*, čímž jest problém zásadně řešen, neboť podle úmluvy značí

$$\varphi(r)_n = n!\,(\dot{n}on\,\dot{r}) = n! - \binom{r}{1}(n-1)! + \ldots + (-1)^r (n-r)!.$$

Jest však

$$\varphi(n-r)_n = (\ddot{r}),$$

tudíž pravděpodobnost, že r koulí jest na pravém místě a ostatní nikoliv:

$$(\ddot{r}) = \frac{(n-r)!}{n!}\left\{\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \ldots + (-1)^{n-r}\frac{1}{(n-r)!}\right\}.$$

C. Dělicí problém.

(Teilungsproblem, problème des partis, problem of points.)

Dva hráči A a B hrají hru bez remis. Vyhraje ten, jenž dosáhne dříve určitého počtu výher. Pravděpodobnosti jednotlivých her nechť jsou stálé a označme je

$$(\dot{A}) = p, \quad (\dot{B}) = q, \quad \text{kde } p + q = 1,$$

neboť remisa není možná. Hra končí však před dosažením žádaného počtu výher, do kterého schází hráči A ještě x a hráči B ještě y výher; hráči se dohodnou, že sázka má se rozděliti podle pravděpodobnosti výhry. Jaká jest pravděpodobnost výhry pro A po přerušení hry?

A. Fermatovo řešení.

Aby hráč A vyhrál, musí x her dříve vyhráti, než B vyhraje y her. Otázka pravděpodobnosti výhry redukuje se tím na pravděpodobnost, že A dříve x her vyhraje, než B y her. Budiž nyní s počet her potřebných ku skončení hry. Počet ten jest sice neznámý, avšak jest obsažen v mezích

$$x \leqq s \leqq x + y - 1,$$

neboť aby A vyhrál, stačí aby $s = x$. Poněvadž dále největší možný počet her jest $(x - 1) + (y - 1) + 1 = x + y - 1$, neboť při stavu $x - 1$ neb $y - 1$ nová hra rozhodne, jest tím číslo s, jak svrchu, vymezeno. Z uvedené nerovnosti odvodíme snadno

$$s \geqq x \geqq s - y + 1$$

a tak obdržíme následující sestavení možných případů příznivých pro A:

A	$(\dot{A})$
$x = s$	$P_s = p^s$
$x = s - 1$	$P_{s-1} = \binom{s}{1} p^{s-1} q$
$x = s - 2$	$P_{s-2} = \binom{s}{2} p^{s-2} q^2$
. . . .	. . . .
$x = s - (y - 1)$	$P_{s-(y-1)} = \binom{s}{y-1} p^{s-y+1} q^{y-1}$

a tím i hledanou pravděpodobnost výhry hráče A:

$$(\dot{A}) = P_s + P_{s-1} + P_{s-2} + \ldots\ldots + P_{s-y+1}$$

čili

$$(\dot{A}) = p^s + \binom{s}{1} p^{s-1} q + \binom{s}{2} p^{s-2} q^2 + \ldots +$$
$$+ \binom{s}{y-1} p^{s-y+1} q^{y-1}.$$

B. Řešení Pascalovo.

Pravděpodobnost výhry hráče A při stavu her x, y označme symbolicky $(\dot{x}, \dot{y})$. Při prvé hře může A buď vyhráti neb prohráti.

Pravděpodobnost výhry pro tuto hru jest pro A rovna p a pravděpodobnost prohry q. Eventuality jsou

a) A vyhrává a má ještě hráti $x - 1$, $B \ldots y$ her,
b) A prohrává a má hráti ještě x, $B \ldots y - 1$ her.

Pravděpodobnost prvé eventuality skládá se tudíž z pravděpodobnosti p, že A právě hranou hru vyhraje a z pravděpodobnosti $(\dot{x} - 1, \dot{y})$, že ji i při stavu $x - 1$, y vyhraje.

Máme tudíž pro pravděpodobnost prvé eventuality rovnici:

$$(\dot{a}) = p\,(\dot{x} - 1, \dot{y}).$$

Pravděpodobnost druhé eventuality skládá se z pravděpodobnosti, že A v uvažované hře prohraje a z pravděpodobnosti, že B při stavu $x - 1$, y vyhraje, takže bude

$$(\dot{b}) = q\,(\dot{x}, \dot{y} - 1).$$

Poněvadž jedna neb druhá eventualita při stavu x, y nastoupiti musí, jest tudíž

$$(\dot{x}, \dot{y}) = (\dot{a}) + (\dot{b}) = p\,(\dot{x} - 1, \dot{y}) + q\,(\dot{x}, \dot{y} - 1).$$

Tím jest problém redukován na differenční rovnici a může býti rozličným způsobem řešen. Položíme-li

$$(\dot{x}, \dot{y}) = w_{x,\,y},$$

jest

$$w_{x,\,y} = p\, w_{x-1,\,y} + q\, w_{x,\,y-1}.$$

Podle dřívějšího označení máme zde především

$$w_{0,\,y} = 1, \qquad w_{x,\,0} = 0,$$

dále jest

$$w_{1,\,1} = p, \qquad w_{2,\,1} = p^2, \; \ldots \; w_{x,\,1} = p^x,$$

a proto

$$w_{1,\,2} = p\, w_{0,\,2} + q\, w_{1,\,1} = p + p\, q,$$

$$w_{2,\,2} = p\, w_{1,\,2} + q\, w_{2,\,1} = p\,(p + p\, q) + q\, p^2 = p^2\,(1 + 2\, q), \ldots$$

Takovým přímým postupem obdržíme, značíme-li $w_{x,\,y}$ krátce opět symbolem $(\dot{x}, \dot{y})$, následující sestavení:

$$(\dot{1}, \dot{2}) = p + p\, q, \qquad (\dot{2}, \dot{2}) = p^2\,(1 + 2\, q),$$

$$(\dot{1}, \dot{3}) = p + p\, q + p\, q^2, \qquad (\dot{2}, \dot{3}) = p^3\,(1 + 3\, q),$$

$$(\dot{1}, \dot{4}) = p + p\, q + p\, q^2 + p\, q^3, \qquad (\dot{2}, \dot{4}) = p^4\,(1 + 4\, q),$$

etc. etc.

$$(\dot{3}, \dot{3}) = p^3\,(1 + 3\, q + \;\; 6\, q^2)$$

$$(\dot{4}, \dot{3}) = p^4\,(1 + 4\, q + 10\, q^2)$$

etc.

C. Lagrangeovo řešení pomocí vytvořujících funkcí.

Buďtež u a v dvě libovolné veličiny vyhovující podmínce $|u| < 1$, $|v| < 1$. Násobme svrchu obdrženou funkcionální rovnici

$$w_{x,\,y} = p\, w_{x-1,\,y} + p\, w_{x,\,y-1}$$

výrazem $u^x v^y$ a vyhledejme součet pro $x, y = 1, 2, 3, \ldots\ldots,$ tím obdržíme:

$$S = \sum_1^\infty \sum_1^\infty w_{x,\,y}\, u^x v^y = \sum_1^\infty \sum_1^\infty p\, w_{x-1,\,y}\, u^{x-1} v^y \,.\, u \; +$$

$$+ \sum_1^\infty \sum_1^\infty q\, w_{x,\,y-1}\, u^x v^{y-1} \,.\, v.$$

Prvý člen pravé strany lze psáti takto:

$$S_1 = p\, u \sum_1^\infty \sum_1^\infty w_{x-1,\,y-1}\, u^{x-1} v^{y-1} + \sum_1^\infty p\, w_{0,\,y}\, u\, v =$$

$$S_1 = p\, u\, S + p\, u \sum_1^\infty w_{0,\,y}\, v^y,$$

jest však

$$w_{0,\,y} = 1,$$

$$\sum_{1}^{\infty} v^y = v + v^2 + v^3 + \ldots\ldots = \frac{v}{1-v}.$$

Máme tudíž

$$S_1 = p\,u\,S + \frac{p\,u\,v}{1-v}.$$

Podobně obdržíme pro druhý člen

$$S_2 = q\,v\,S$$

a tím
$$S = S_1 + S_2 = \frac{p\,u\,v}{1-v} + p\,u\,S + q\,v\,S$$

a z této rovnice konečně vytvořující funkci hledané pravděpodobnosti

$$S = \frac{p\,u\,v}{[1-v]\,[1-p\,u-q\,v]}.$$

Jest však

$$\begin{aligned} S = w_{1,\,1}\,.\,u\,v &+ w_{1,\,2}\,u\,v^2 + w_{1,\,3}\,u\,v^3 + \ldots. \\ &+ w_{2,\,1}\,u^2\,v + w_{2,\,2}\,u^2\,v^2 + \ldots. \\ &\qquad\quad + w_{3,\,1}\,u^3\,v + \ldots. \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Rozvineme-li předcházející vzorec v potenční řadu podle $u\,v$, obdržíme srovnáním s posledním výrazy

$$w_{1,\,1},\quad w_{1,\,2},\quad w_{1,\,3},\ \ldots\ldots$$

Za tím účelem pišme

$$S = \frac{p\,u\,v}{1-v} \cdot \frac{1}{1-q\,v} \cdot \frac{1}{1-\dfrac{p\,u}{1-q\,v}} =$$

$$= \frac{p\,u\,v}{(1-v)\,(1-q\,v)} \left\{1 - \frac{p\,u}{1-q\,v} + \frac{p^2\,u^2}{(1-q\,v)^2} - \ldots\ldots\right\}$$

čili

$$S = \sum_{1}^{\infty} \frac{p^x\,v}{(1-v)\,(1-q\,v)^x}\,.\,u^x.$$

Rozvineme-li nyní ještě *právě získaný tvar pro S v potenční řadu* podle v a vyhledáme-li si koefficient členu $u^x\,v^y$ onoho rozvoje, jenž je roven

$$p^x\left[1 + x\,q + \frac{x\,(x+1)}{2!}\,q^2 + \ldots + \frac{x\,(x+1)\ldots(x+y-2)}{(y-1)\,!}\,q^{y-1}\right],$$

obdržíme tím konečně

$$(\ddot{A}) = w_{x,y} = p^x \left[1 + xq + \frac{x(x+1)}{2!} q^2 + \dots + \right.$$
$$\left. + \frac{x(x+)\dots(x+y-2)}{(y-1)!} q^{y-1} \right],$$

což jest pravděpodobnost výhry hráče A. Pravděpodobnost výhry hráče B jest potom

$$(\ddot{B}) = 1 - (\ddot{A}),$$

neboť jeden z nich musí vyhráti.

Poznámka. Jsou-li tři hráči, obdržíme analogicky differenční rovnici

$$w_{x,y,z} = p\, w_{x-1,y,z} + q\, w_{x,y-1,z} + r\, w_{x,y,z-1}$$

a vytvořující funkci tvaru

$$S = \frac{p\,u\,v\,w}{(1-v)(1-w)(1-p\,u-q\,v-r\,w)}.$$

Historická poznámka. Uvažovaný problém jest historicky důležitý z té příčiny, poněvadž dal podnět k vybudování algorithmu mathematické pravděpodobnosti. *Chevalier de Meré* předložil jej *Pascalovi* a ten opět *Fermatovi*, kteří oba podali svrchu uvedená řešení ovšem jen principielně a pro zvláštní případy, jak to toho času bylo obvyklé (1654). *Jakub Bernoulli* sestavil pro $p = q = \frac{1}{2}$ tabulku, kterou ve výtahu zde podáváme a která dává $(\ddot{A})$.

Hráči A schází her	Hráči B schází her				
	1	2	3	4	5
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{15}{16}$	$\frac{31}{32}$
2	$\frac{1}{4}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{11}{16}$	$\frac{26}{32}$	$\frac{57}{64}$
3	$\frac{1}{8}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{16}{32}$	$\frac{42}{64}$	$\frac{99}{128}$
4	$\frac{1}{16}$	$\frac{6}{32}$	$\frac{22}{64}$	$\frac{64}{128}$	$\frac{163}{256}$
5	$\frac{1}{32}$	$\frac{7}{64}$	$\frac{29}{128}$	$\frac{93}{256}$	$\frac{256}{512}$

Příkladně.

Schází-li hráči A ještě 2 a hráči B ještě 3 hry, bude podle tabulky

$$(\dot{\dot{A}}) = \frac{11}{16},$$

pravděpodobnosti, že A vyhraje a pravděpodobnost, že B vyhraje

$$(\dot{\dot{B}}) = \frac{5}{16};$$

o zbytek měli by se podle toho rozděliti v poměru

$$A : B = 11 : 5.$$

D. Petrohradský problém.

Petr hází mincí tak dlouho, až se ukáže hlava; stane-li se to při prvém vrhu, obdrží Pavel dukát; stane-li se to teprve při druhém vrhu, obdrží Pavel dva dukáty, při třetím čtyři dukáty a tak při každém následujícím dvakráte tolik co při předcházejícím. Jaká jest mathematická naděje Pavlova?

Zde máme fakty

$$X: \; X_1, \; X_2, \; X_3, \ldots,$$

k nimž se řadí čísla

$$x: \; x_1, \; x_2, \; x_3, \ldots,$$

jichž pravděpodobnosti jsou

$$p: \; \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2}.\frac{1}{2} = \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2} = \frac{1}{8}, \ldots,$$

takže jest mathematická naděje Pavlova dána výrazem:

$$\{\dot{\dot{X}}\} = \frac{1}{2}.1 + \frac{1}{4}.2 + \frac{1}{8}.4 + \ldots = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ldots = \infty,$$

který představuje nekonečně velkou veličinu.

Uvedený problém jest historicky zajímavý tím, že vedl *D. Bernoulliho* k theorii *morální naděje.* Poněvadž byl r. 1748 uveřejněn v aktech petrohradské akademie, nazývá se „*petrohradským problémem*".[11])

Zde uplatňuje se zřejmě rozdíl mezi ryzí mathematikou a skutečností. Mathematika předpokládá eventualitu, jež fakticky

není možna. Ve skutečnosti hra vždy musí skončiti, neboť nekonečné hry jsou jen v mathematické fixi možné. Analogicky připouští i klasická theorie methody nejmenších čtverců možnost nekonečně velké chyby, která aktuálně jest také a priori nemožná.

Úloha přestává býti mystickou, stanovíme-li, že hra má při n-tém tahu končiti.

Bude pak

$$\{X\} = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot 2 + \frac{1}{8} \cdot 4 + \dots + \frac{1}{2^n}\, 2^{n-1} = \frac{n}{2}.$$

§ 15. Pravděpodobnost jako pojem objektivní.

Počet pravděpodobnosti, jak jsme jej dosud uvažovali, byl mathematickou fixí, kterou jsme účelně ale proto přece konvencionálně stanovili. Zejména byl ušit, abychom se obrazně vyjádřili, podle míry schematu osudí a tím stal se něčím zvláštním, ne všeobecně platným a upotřebitelným. Oprávněnost jeho použití na jsoucno čerpali jsme ze *zákona velkých čísel*. Zákon ten byl považován ještě *Timerdingem* za něco nevysvětlitelného, neboť jak si to ujasniti, *že nahodilé příčiny mohou míti, ba v jistých případech dokonce nutně mají, zákonité důsledky?* Jak jest na druhé straně možno, aby v přírodě, kde jest vše uzákoněno, *zákonité příčiny mohly vésti k nahodilým výsledkům?* Jest nespornou zásluhou Smoluchowskiho,*) že jsa veden moderní aplikací počtu pravděpodobnosti ve fysice ukázal, jak uvedené záhady vysvětliti.

Abychom jeho úvahy alespoň zásadně charakterisovali, uvažujme následující příklad, původně užitý *Poincaréem.***) Dejme tomu, že střílíme do stejnoměrně s rychlostí c se otáčejícího terče T v intervalech $x = t_k$ pro $k = 1, 2, 3, \dots$; mohou nastati dva případy (viz obr. 9):

a) *obvyklé seskupení* tref v kružnici, která bude tím stejnoměrněji obsazena, čím větší jest počet ran,

b) *zvláštní seskupení*, je-li mezidoba ran úměrná době rotace terče, při čemž nastává seskupení tref kol jednoho místa m.

*) Die Naturwissenschaften r. 1918, str. 253.

**) *Poincaré*, Leçons sur le calcul des prob., nové vydání r. 1912 a téhož La Science et l'Hypothèse, 1906 aneb něm. překlad z r. 1904 od F. L. Lindemanna, a dále kap. „Le hasard“ v spise Science et Méthode.

Singulární seskupení tvoří očividně vyjimečný případ, který snad nikdy nenastane sám od sebe. Při skutečných zjevech můžeme proto předpokládati zpravidla normální případy. Poloha bodu trefy y jest při tom očividně vypočitatelnou funkcí doby výstřelu x (příčiny), takže lze všeobecně psáti

$$y = f(x).$$

Snadno konstatovati prvou důležitou vlastnost těchto funkcí, jež nazýváme kausálními. *Funkce* $f(x)$ *jest pro* $x = x_0$, *kde* x_0 *značí dobu trefy, přetržitou*, neboť malé změny v x vyvolávají při velké rychlosti c velké změny v y, t. j. v poloze bodu trefy. To jest nutné, nemají-li se trefy seskupiti kol jediného místa a odtud věta:

Kausální funkce zjevů uvažovaných v počtu mathematické pravděpodobnosti jsou toho druhu, že malým variacím x (*příčin*) *odpovídají velké variace* y (*důsledků*).

Aby dále trefy pokrývaly při velkém počtu střel celé okruží *stejnoměrně*, musí očividně veličiny x vyhovovati ještě druhé *funkci* $\varphi(x)$ *vyjadřující podmínku stejnoměrného seskupení* tref v kružnici.

U zjevů uvažovaného charakteru existuje tedy kromě *kausální funkce* $f(x)$ nutně i druhá charakteristická funkce $\varphi(x)$. V celé úvaze nevyskytlo se při tom nic, co by poukazovalo na „*náhodu*", naopak vše bylo kausálně doloženo. Tak mohou zjevy *kausálně přesně určené* dosíci stavů, jež mají charakter nahodilosti. Při tom jsou tyto stavy za jistých okolností, zde na př. při velké stálé rychlosti c *nikoliv vyjimečné, nýbrž normální. Náhoda stává se tak zákonitou.*

Mysleme si nyní, že terč jest z $\frac{1}{4}$ bílý a $\frac{3}{4}$ černý; za předpokladu toho co, svrchu uvedeno, rozumíme již rčení: pravděpodobnost, že trefa bude ležeti v bílé části, jest rovna $\frac{1}{4}$. (Srovnej obr. 10).

Pro takto „*uzákoněnou náhodu*" platí tři principy, formulované původně *Poincaréem*, jež plynou bezprostředně z naší úvahy:

1. *malé příčiny — velké následky*,
2. *různé příčiny — stejné následky*,
3. *stejná možnost výsledků.*

Jich význam objasníme příkladem z theorie plynů. Molekuly plynů představujeme si při tom jako elastické koule, nalézající se v přímočarém pohybu. Setkají-li se dvě, nastane u obou změna směrů, při čemž malým variacím směrů před setkáním odpovídají

velké změny směrů po setkání. Tak uplatňuje se zde princip: *malé příčiny, velké následky.**) V plynech představujeme si dále velké množství molekul pohybujících se ve všech možných směrech. Poněvadž stav plynu se sám sebou nemůže měniti, musíme pokládati průměrnou hodnotu rychlostí a průměrný směr jich pohybů za veličiny stálé. To ilustruje druhý princip: *Různé příčiny, stejný výsledek.* Konečně jsou *možnosti setkání rozděleny v plynech stejnoměrně,* neboť pro každou jinou představu chybí u plynů předpoklady aneb snad lépe řečeno, tím právě charakterisujeme plyny, jež nazýváme ideálnými. Poněvadž všem třem podmínkám aplikability počtu pravděpodobnosti jest vyhověno, uplatňují se i jeho úvahy v kinetické theorii plynů ideálných plně.

Singulární případy při velmi velikém zředění plynů stanou se tak pochopitelnými aneb co nejméně *nezáhadnými.* Podobné úvahy platí i pro jiné části molekulární fysiky; neboť to, co vidíme a pozorujeme, jsou většinou jen *průměrné stavy.*[13])

Tato úvaha jest důležita ještě i v jiném směru. I u zjevů, jež mají *úplně charakter nahodilostí,* může jich povstání býti zcela *zákonité.* Jest to jen naše nevědomost, jež v nich vidí *náhodu. Slovo „náhoda“ nemá proto v mathematické pravděpodobnosti nic s „filosofickou“ aneb „faktickou“ náhodou dělati, nýbrž znamená přesně determinované seskupení faktů.* Tím mizí i veškerá mystika z toho počtu a řešena jest i zároveň otázka jeho upotřebení.

I s hlediska ryzí mathematiky učiněn byl pokus definovati mathematickou pravděpodobnost ryze logicky.[14]) Dejme tomu, že máme *řadu elementů* (čísel, a t. d.) schopných *„býti spočítánu“*, při čemž ať každý element v uvedené řadě zaujímá *určité místo.* Předpokládejme dále, že jednotlivé elementy jsou charakterisovány značkou buď „*A*“ aneb „*non A*“, takže každý element má dvě a pouze dvě vlastnosti:

1. *zaujímá určité místo v uvažované řadě,*
2. *jest označen buď „A“ neb „non A“.*

Kromě těchto vlastností, jež *charakterisují individua řady,* zavedeme ještě dvě *kolektivní vlastnosti,* jímž musí uvažovaná řada vyhověti, aby nabyla *určitého charakteru kolektivního,* t. j. onoho, jenž je měřitelný počtem mathematické pravděpodobnosti.

---

*) Conf. *Timerding,* Die Analyse des Zufalls, str. 5.

Označme elementy s charakteristikou $A : e_k$ a s charakteristikou *non* $A : e_k'$ a budiž

$$e_1\, e_2'\, e_3\, e_4\, e_5'\, e_6'\, e_7\, e_8'\, e_9 \ldots$$

uvažovanou řadou. Vezměmež v úvahu především jakýsi konečný počet členů s, v němž nechť jest m elementů e a n elementů e', takže

$$s = m + n,$$

potom prvá vlastnost dá se vyjádřiti postulátem

$$\lim_{\substack{m=\infty \\ n=\infty}} \frac{m}{m+n} = p, \quad \lim_{\substack{m=\infty \\ n=\infty}} \frac{n}{m+n} = q,$$

kde p a q jsou pro uvažovanou řadu určité charakteristické stálé veličiny, v nichž snadno poznáme mathematické pravděpodobnosti. Abychom dospěli k druhé vlastnosti, představme si, že osudí obsahuje stejný počet bílých a černých koulí, avšak bílé koule nechť jsou na vrchu a černé vespod. Potom faktická pravděpodobnost vytáhnouti dvě stejné koule po sobě jest zajisté větší, než vytáhnouti dvě nestejné. Má-li mathematická pravděpodobnost dáti správný obraz očekávaných zjevů, nutno koule náležitě promíchati. Druhý postulát Miesesův zní proto: *Uvažovaná řada musí býti dokonale promísena*, t. j. tak, aby počet pravděpodobnosti stal se aplikabilis nejen na každou libovolně oddělenou část uvedené řady, ale i na každou novou podřadu, již lze sestrojiti z uvažované pomocí nějaké předem dané — ve smyslu *Jacobiho* „*rozumné**) *funkce*" indexu k. Vytvoříme-li na př. podřadu tím způsobem, že v dané řadě seškrtáme veškeré elementy, jichž index k jest sudým číslem, musí vzniklá řada býti stejně „*dokonale*" *promísena* jako původní, t. zn. musí míti veškeré kolektivní vlastnosti původní řady.

Tím charakterisováno jest seskupení elementů A a *non* A, které může býti předmětem úvah počtu pravděpodobnosti. Hlavní obtíž Miesesovy theorie spočívá v mathematické formulaci pojmu „dokonalého promísení" a to jak se zdá a jak Miesesovy víc než obšírné práce ukazují, není tak snadnou věcí.

*) To značí funkci bez analytických zvláštností.

III. Pravděpodobnosti geometrické.

§ 16. Příklady.

I. Příklad. Jaká jest pravděpodobnost, že nějaký bod C libovolně volený na úsečce $\overline{AB}$ leží v intervalu (a, b)?

Pokus představujeme si následovně (viz obr. 11.):

Na úsečce $\overline{AB}$ volíme ve vzdálenosti x od A bod C libovolně a potom teprve přikládáme k $\overline{AB}$ pravítko o téže délce, na němž jest interval (a, b) vyznačen. Skutečný bod, t. j. tečka zaujme na úsečce $\overline{AB}$ určité velmi malé místo Δx. Mysleme si nyní jak $\overline{AB}$ tak i $\overline{ab}$ rozděleny na Δx, potom jest hledaná pravděpodobnost dána zlomkem

$$\sum_a^b \Delta x : \sum_A^B \Delta x = \overline{ab} : \overline{AB}.$$

II. Příklad. Představme si nyní, že polohu bodu C určujeme nějakým pokusem, při kterém určité poloze bodu x se přiřaďuje φ(x) veličin x.

Jak grafické znázornění vyhlíží, je viděti na obr. 12., při čemž počet bodů v jednotlivých sloupcích rovná se $\varphi(x)$. Každou tečku představme si umístěnou ve čtverci $\overline{\Delta x}\,\overline{\Delta x}$, čímž obdržíme opět jako u předešlého příkladu pro tutéž pravděpodobnost výraz:

$$P = \sum_a^b \overline{\Delta x} . \overline{\Delta x} : \sum_A^B \overline{\Delta x} . \overline{\Delta x}.$$

Počet čtverců je však

$$\Sigma\, \overline{\Delta x} . \overline{\Delta x} = \Sigma\, \varphi(x)\, \Delta x,$$

takže můžeme psáti přecházejíce k limitám

$$P = \int_a^b \varphi(x)\, dx : \int_A^B \varphi(x)\, dx,$$

kde evidentně prvý integrál rovná se ploše $abcd$ a druhý celé ploše nad $\overline{AB}$.

Uvedené příklady ilustrují možnost rozšíření pojmu mathem. pravděpodobnosti ve směru infinitesimálném. Zde ihned můžeme

odvoditi jisté všeobecné vlastnosti funkce $\varphi(x)$. Především platí evidentně věta, že bod C někde na $\overline{AB}$ musí ležeti. Máme tudíž

$$\int_A^B \varphi(x)\,dx = 1.$$

Označme veličinou X fakt, že bod C leží ve vzdálenosti $\overline{OC} = x$, bude potom ex definitione

$$\{X\}_a^b = \sum_a^b P_c\,x = \int_a^b x\,\varphi(x)\,dx,$$

$$\{X^2\}_a^b = \sum_a^b P_c\,x^2 = \int_a^b x^2\,\varphi(x)\,dx.$$

Konsekventně dojdeme tak k definiční rovnici symbolu

$$\{f(X)\}_a^b = \int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx.$$

Pouhým zevšeobecněním předcházejícího jest nyní řešení následujícího problému:

Jaká jest pravděpodobnost, že bod C leží uvnitř plochy π umístěné uvnitř plochy Π. Pravděpodobnost ta jest dána výrazem

$$P_c = \frac{\iint\limits_{(\pi)} f(x,y)\,dx\,dy}{\iint\limits_{(\Pi)} f(x,y)\,dx\,dy},$$

kde integrál v čitateli vztahuje se ku ploše π a integrál ve jmenovateli ku Π (viz obr. 13).

Pravděpodobnost podobného druhu nazývá se *geometrickou pravděpodobností.* Pojednává o ní obšírně *Czuber* v díle: Geometrische Wahrscheinlichkeiten (1884).

Důležitá poznámka.

Předmětem geometrické pravděpodobnosti mohou býti jen problémy redukovatelné na prototypy uvedených příkladů, t. j. předměty, při kterých *možné a příznivé případy jsou stejné dimense,* neboť mathematická pravděpodobnost jest zásadně vždy číslem aneb chceme-li se určitěji vysloviti: poměrem číselným. Nutno zdůrazniti, že název *geometrické pravděpodobnosti* jest

vlastně lucus a non lucendo a nemá s pravděpodobností nic společného kromě toho, že definiční rovnice jest formálně stejná. Geometrie v tom jest, ale pravděpodobnost žádná,[14]) poněvadž se evidentně jedná jen o geometrické střední hodnoty.

III. Příklad. Na úsečce $\overline{A_1 A_2} = a$ zvolme body B_1, B_2 libovolně; jest určiti pravděpodobnost, že $\overline{B_1 B_2} > b$, kde b jest libovolná předem daná úsečka a $a > b$.

Položme

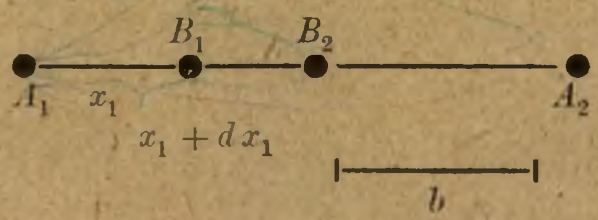
$$\overline{A_1 B_1} = x_1, \quad \overline{A_1 B_2} = x_2.$$

V případě námi uvažovaném jest

$$\left.\begin{array}{r} a > x_2 > x_1 > 0, \\ x_2 - x_1 > b. \end{array}\right\}$$

Abychom mohli ukázati, oč geometrické řešení jest jednodušší analytického, vyřešme problém nejprve analyticky. Pravděpodobnost, že bod B_1 zvolen v mezích x_1 a $x_1 + d x_1$, jest podle definice

$$\dot{(B_1)}_{x_1}^{\dot{x}_1 + d x_1} = \frac{d x_1}{a}$$



a táž pro bod B_2

$$\dot{(B_2)}_{x_2}^{\dot{x}_2 + d x_2} = \frac{d x_2}{a}.$$

Pravděpodobnost dP, že jedno i druhé stane se zároveň skutkem, jest proto

$$d P = \frac{d x_1 \cdot d x_2}{a^2}.$$

Abychom mohli integrovati, musíme především stanoviti hranice, v nichž se x_1 a x_2 podle podmínek problému mohou pohybovati.

Hodnota x_1 má minimum $x_1 = 0$, hodnota x_2 maximum $x_2 = a$; maximum pro x_1 a minimum pro x_2 poskytují následující rovnice:

1. Z podmínky

$$x_2 - x_1 \gtrless b$$

čili

$$x_2 - b > x_1$$

plyne

$$x_2\,(max) - b \mp x_1\,(max),$$

jest tedy

$$x_1\,(max) = a - b.$$

2. Poněvadž jest

$$x_2 > x_1$$

a zároveň

$$x_2 - x_1 > b$$

čili

$$x_2 > b + x_1,$$

obdržíme

$$x_2\,(min) = b + x_1\,(min),$$

neboť bod x_1 jest již volen a proto pro volbu bodu x_2 jest stálým předem daným bodem.

Integrál výrazu pro $d\,P$ zní proto:

$$P = \frac{1}{a_2} \int\limits_{x_1\,(min)}^{x_1\,(max)} d\,x_1 \,.\, \int\limits_{x_2\,(min)}^{x_2\,(max)} d\,x_2$$

čili

$$P = \frac{1}{a^2} \int\limits_{o}^{a-b} d\,x_1 \,.\, \int\limits_{b}^{a} d\,x_2 = \left(\frac{a-b}{a}\right)^2.$$

Řešení geometrické.

Narýsujme si čtverec o ploše a^2 a x_1, x_2 buďtež souřadnice bodu P (viz obr. 14.).

V trojúhelníku $O\,A\,A''$ platí nerovnost

$$o < x_1 < x_2 < a.$$

Dále jest geometricky evidentně

$$x_2 - x_1 = \overline{P\,P'},$$

podmínce

$$x_2 - x_1 > b,$$

vyhovují proto veškeré body ležící v trojúhelníku $A'A''A'''$, jehož plocha jest rovna

$$\frac{1}{2}\,(a - b)^2.$$

Té podmínce a podmínce

$$O < x_1 < x_2 < a$$

vyhovují dále body v trojúhelníku $O\,A\,A''$ o ploše $\frac{1}{2}\,a^2$.

Máme tudíž podle definice

$$P = \left(\frac{a-b}{a}\right)^2 = \frac{\triangle A' A'' A'''}{\triangle O A A''}$$

jako dříve. Geometrická úvaha jest samozřejmě jednodušší a přehlednější, neboť nepotřebuje integrace, která ne vždy jest tak snadnou, jako u uvažovaného příkladu.

IV. *Bertrandovo paradoxon.**) *V kružnici o poloměru* r *narýsujme libovolnou sečnu* s, *jaká jest pravděpodobnost, že délka úseku na sečně bude větší než strana vepsaného rovnostranného trojúhelníka.*

Jest to samozřejmě problém předešlého rázu, avšak přenesený na obvod kružnice.

Podle předešlého příkladu lze uvažovati takto:

$$a - b = \frac{1}{3} k, \quad a = k,$$

kdež k značí obvod kružnice, tedy

$$(\dot{x}\, \dot{o}) = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9},$$

což by bylo správné, kdybychom tak jako u předcházejícího příkladu oba body volili zcela náhodně na př. *čísly rulety*. — Lze však uvažovati též následovně (viz obr. 15.):

Budiž $\overline{OX}$ onou sečnou s a považujme O za stálý bod, t. j. uvažujme tentýž problém, avšak předpokládejme, že pokusy vykonáme podle následujícího schematu: bodem O prokládáme libovolně sečny, jejichž poloha určena jest na kružnici hodnotou x. *Tím měníme modality pokusů*, proto lze a priori již očekávati, že hledaná pravděpodobnost bude jiná. Výpočet to také dokazuje. Na oblouku $\widehat{AB} = \frac{2\pi}{3}$ leží totiž příznivé body X, kdežto všechny možné body leží na obvodě kružnice, t. j. oblouku o délce 2π. Máme tedy pro *všechny sečny vycházející z určitého bodu* O pravděpodobnost

*) Conf. *Bertrand*, Calcul des prob. Paris 1889, str. 4. *Poincaré*, Calc. des prob. Paris 1896, str. 96; de *Montessus* (Nouv. Ann. des math. Ser. 4. t. 3 1903 a podobný problém u *Brunna* (Sitzungsb. der k. bayr. Akad. der W. 1892).

$$\dot{(}\overline{OX} > r\sqrt{3}\dot{)} = \frac{1}{3},$$

při čemž předpokládáme, že sečna jest dána body O a X a pravděpodobnosti jich současné volby rovnicí

$$\dot{(}O\,X\dot{)} = \dot{(}O\dot{)}\,\dot{(}X\dot{)}.$$

Poněvadž bod O můžeme voliti libovolně na obvodě dané kružnice, jest zřejmě

$$\dot{(}O\dot{)} = 1$$

$$\dot{(}X\dot{)} = \frac{1}{3}$$

a proto

$$\dot{(}O\,X\dot{)} = 1 \,.\, \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

Jak počet tak i přímá evidence vede nás k stejnému výsledku, který jest však rozdílný od předešlého. Uvažujme nyní tentýž příklad při modalitách opět změněných.

Dejme tomu, že sečna určena jest jedním bodem X průměru $\overline{A\,B}$ a směrem σ, t. j. tím, že na př. sečny rýsujeme pomocí pravítka k rýsování rovnoběžek (viz obr. 17.). Jest zde $\dot{(}\sigma\dot{)} = 1$, neboť položením pravítka do *směru* σ jest rýsování přímek rovnoběžných s tečnou v bodě A předem zajištěno. Dále jest

$$\dot{(}X\dot{)} = \frac{\overline{a\,b}}{\overline{A\,B}} = \frac{1}{2},$$

tedy

$$\dot{(}\sigma\,X\dot{)} = \dot{(}\sigma\dot{)}\,\dot{(}X\dot{)} = 1 \,.\, \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Aby výsledek výpočtu došel potvrzení, nutno ovšem pokusy vykonati uvedeným způsobem.

Bertrand považoval oba výsledky za rovnoprávné a viděl v tom paradoxon, praví totiž: „Entre ces trois [on uvažuje ještě třetí případ, který skytá $\dot{(}\sigma\,X\dot{)} = \frac{1}{4}$] réponses quelle est la véritable? Aucune des trois n'est pas fausse, aucune n'est exacte, la question est mal posée.“

V. Příklad. Vyšetřiti obor existence reálných kořenů rovnice

$$z^2 + p\,z + q = 0$$

v případě, kdy

$$+P > p > -P,$$
$$+Q > q > -Q$$

a P i Q jsou danými čísly.

Považujme p a q za souřadnice bodu B. Oběma podmínkám vyhovují potom body v čtyřúhelníku 1, 2, 3, 4 (viz obr. 18.); kořeny jsou reálné, když

$$q \leq \frac{p^2}{4}$$

a imaginárné, je-li

$$q > \frac{p^2}{4}.$$

Rovnice $q = \frac{p^2}{4}$ stanoví tedy hranici mezi realitou a soujemností. Body, pro které

$$q < \frac{p^2}{4},$$

obsaženy jsou však v čárkovaném poli, jehož velikost jest

$$2\left[PQ + \frac{1}{3}\left(\frac{P}{2}\right)^2\right].$$

Poněvadž plocha vymezená body 1, 2, 3, 4 obnáší $4\,PQ$, bude pravděpodobnost, že v daném oboru rovnice

$$z^2 + pz + q = 0$$

má reálné kořeny, vyjádřena výrazem

$$\frac{P + 12\,Q}{24\,Q}.$$

Analytické řešení tohoto problému jest daleko obtížnější.

VI. Buffonova úloha. Vrháme jehlu o délce $2\,c$ *na vodorovnou rovinu, rozdělenou rovnoběžnými přímkami o vzdálenosti* $2\,a$ ($a > c$). *Hledá se pravděpodobnost, že jehla protne některou rovnoběžku.*

Problém ten lze zjednodušiti. Narýsujme přímky půlící vzdálenosti dvou sousedních rovnoběžek, potom lze uvažovati jen polohy dvou, t. j. v pásu ($A\,B\,C\,D$) (viz obr. 19.). Zrcadlením na přímce p obdržíme vždy jeden aequivalentní obraz a tedy stačí uvažovati jen ($A\,B$). Poněvadž to platí i pro zrcadlení na přímce q, stačí

konečně uvažovati jedině obraz A. — Budiž $M\,N$ poloha jehly a P její střed. Situace jest zde určena kolmou vzdáleností x bodu P od přímky p a azimutem φ. Mathematická pravděpodobnost intersekce budiž symbolický označena $(\dot{x}\,\dot{\varphi})$. Máme především hranice

$$o < x < c, \qquad o < \varphi < \varphi_0 = arc\cos\frac{x}{c}.$$

Předpokládejme nyní, že $c < a$, že tedy jehla může protnouti vždy jen jednu přímku.

Má-li totiž jehla přímku protnouti, musí (viz obr. 19.)

$$c\cos\varphi \geqq x;$$

jest pak pravděpodobnost, že střed jehly padne do bodu P,

$$d\,(\dot{x}) = \frac{d\,x}{a}$$

a pravděpodobnost protnutí přímky pro *existentní již* x

$$(\dot{\varphi}/\dot{x}) = \frac{\varphi_0}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2\,\varphi_0}{\pi}.$$

Složená elementární pravděpodobnost, že jedno i druhé zároveň nastane jest

$$\frac{2\,\varphi_0}{\pi}\cdot\frac{d\,x}{a} = \frac{2\,d\,x}{\pi\,a}\,arc\cos\frac{x}{c}$$

a tudíž

$$(\dot{x}\,\dot{\varphi}) = \sum_0^c \frac{2\,\varphi_0}{\pi}\cdot\frac{d\,x}{a} = \frac{2}{\pi\,a}\int_0^c arc\cos\frac{x}{c}\,.\,d\,x.$$

Částečnou integrací přesvědčíme se, že

$$\int_0^c arc\cos\frac{x}{c}\,d\,x = \left[x\,arc\cos\frac{x}{c} - c\sqrt{1-\frac{x^2}{c^2}}\right]_0^c = c,$$

takže konečně jest

$$(\dot{x}\,\dot{\varphi}) = \frac{2\,c}{a\,\pi}.$$

Budiž dále $2\,a > c > a$.

Zde jest možné protnutí dvou přímek zároveň. Vyhledejme si nejprve počet všech možných případů. Tento skládá se ze všech možných elementů dx, t. j.

$$\int_0^a dx = a,$$

z nichž každý se kombinuje s počtem všech přípustných $d\varphi$. t j.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi = \frac{\pi}{2}.$$

Všech možných případů jest proto

$$\frac{a\pi}{2}.$$

Nyní se jedná o stanovení všech příznivých případů. Máme zde tři možnosti. Budiž

α *počet případů protnutí dvou přímek,*
β *počet případů protnutí jedné přímky a*
γ *počet případů neprotnutí žádné přímky.*

Poněvadž jedno z nich musí nastati, bude samozřejmě

$$\alpha + \beta + \gamma = a \cdot \frac{\pi}{2}.$$

Slučme nejprve obě prvé eventuality v jednu (α, β). Máme analogicky jako dříve, jenom že na místo c vstupuje a,

$$(\alpha, \beta) = \frac{2}{a\pi}\int_0^a arc\cos\frac{x}{c}\,dx = \frac{2}{\pi}\left[arc\cos\frac{a}{c} - \frac{c}{a} - \frac{\sqrt{c^2 - a^2}}{a}\right].$$

Nyní vyšetříme případ (β). Zde jsou hranice

$$2a - c < x < a$$

a dále jest

$$\varphi_0 = arc\cos\frac{2a - x}{c},$$

tudíž

$$(\beta) = \frac{2}{a\pi}\int_{2a-c}^a arc\cos\frac{2a-x}{c}\,dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{\sqrt{c^2 - a^2}}{a} - arc\cos\frac{a}{c}\right].$$

Z rovnice

$$(\dot{\alpha}, \dot{\beta}) = (\dot{\alpha}) + (\dot{\beta})$$

plyne pak

$$(\dot{\alpha}) = (\dot{\alpha}, \dot{\beta}) - (\dot{\beta}) = \frac{4}{\pi} \left[arc\cos\frac{a}{c} - \frac{2}{a}\sqrt{c^2 - a^2} + \frac{c}{2a} \right].$$

Pro $c = a$ obdržíme z obou předcházejících případů shodně

$$(\dot{\beta}) = 0, \ (\dot{\alpha}) = \frac{2}{\pi}.$$

Problém jest i historicky zajímavý jako prvý toho druhu a má hojnou literaturu.*)

Bylo jej i použito k experimentálnímu stanovení Ludolfiny π, ovšem neoprávněně. Problém jest evidentně problémem pouze *ryzí mathematiky* a absolutně nezávislý na jsoucnu, neboť v něm rozhodují jen geometrické vztahy. Vrhem jehly nelze jej nikdy realisovati.

Kdybychom již chtěli pokus ten realisovati, museli bychom proto postupovati následovně:

Mezi přímky nanesme si síť bodů (viz obr. 20.) a na průsvitný papír kruh o poloměru c rozdělený průměry na stejné sektory. Postupně přikládáme kruh středem na jednotlivé body sítě dodržujíce přesně orientaci sektorů a spočítáme případy, v nichž některý průměr kruhu přímku p protne. Je-li n počet bodů a q počet průměrů kruhu, jest počet všech možných případů roven $n\,q$

Uvedený problém možno řešiti ještě *názorněji* takto:

Pravděpodobnost protnutí v případě $a > c$ označili jsme symbolem $(\dot{x}\,\dot{\varphi})$. Považujme x a y za pravoúhlé souřadnice bodu B, pak jsou ony vázány na hranice

$$0 < x < a,$$

$$0 < \varphi < \frac{\pi}{2},$$

to jest: musí se nalézati v obdélníku určeném body o souřadnicích

$$\left[0, 0\right], \ \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \ \left[a, 0\right], \ \left[a, \frac{\pi}{2}\right].$$

*) Viz: *E. Czuber*, Geometrische Wahrscheinlichkeiten, str. 85 a týž v Jahresbericht der Deut. Mathem. Vereinigung r. 1899, str. 59.

Obdélník ten obsahuje kolektivum všech možných bodů [x, φ. kolektivum všech možných hodnot, při kterých nastane protnutí podmíněno jest nerovnostmi

$$0 < x < c,$$

$$0 < \varphi < \varphi_0 = arc\,cos \frac{x}{c}\,.$$

Jeho hraniční body (na př. A) mají souřadnice φ a x a vyhovují rovnici (viz obr. 21.)

$$x = c\,cos\,\varphi,$$

neboť aby nastalo protnutí, musí

$$x \leqq c\,cos\,\varphi.$$

Každý bod na př. B nalézající se uvnitř plochy ohraničen křivkou K, jejíž rovnice jest

$$K \equiv x - c\,cos\,\varphi = 0,$$

představuje možnost protnutí, každý bod mimo plochu pak nemožnost protnutí. Máme tudíž jako dříve:

$$(\dot{x}, \dot{\varphi}) = \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} c\,cos\,\varphi\,.\,d\,\varphi}{a\,.\,\frac{\pi}{2}} = \frac{2\,c}{a\,\pi}\,.$$

VII. problém. Tenká hůlka o délce l byla rozlomena na tři díly a, b, c tak, že

$$a + b + c = l.$$

Jaká jest pravděpodobnost, že z uvedených dílů a, b, c lze sestrojiti trojúhelník. Řešme úkol především *algebraicky.*

Rozdělme hůlku na $2\,n\,\lambda$ stejných částí a položme

$$a = x\,\lambda, \quad b = y\,\lambda, \quad c = z\,\lambda.$$

Z délek x, y, z lze sestrojiti trojúhelník, je-li

$$x < y + z, \quad y < x + z, \quad z < x + y.$$

Jednu z těchto veličin lze eliminovati (na př. z) pomocí rovnice

$$x + y + z = 2\,n,$$

čímž obdržíme podmínky

$$x < n, \quad y < n, \quad x + y > n,$$

kterým vyhovují evidentně následující skupiny hodnot x a y:

$$\begin{array}{ll} x = 2 & y = n - 1, \\ x = 3 & y = n - 1, n - 2, \\ x = 4 & y = n - 1, n - 2, n - 3, \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ x = n - 1 & y = n - 1, n - 2, \ldots\ldots 2. \end{array}$$

Počet všech příznivých kombinací (každé x lze kombinovati s každým y) jest proto roven

$$1 + 2 + 3 + \ldots. + (n - 2) = \frac{(n-2)(n-1)}{2}.$$

Naproti tomu jest počet všech vůbec možných kombinací:

$$\begin{array}{ll} x = 1 & y = 1, 2, 3, \ldots \quad (2n - 2), \\ x = 2 & y = 1, 2, 3, \ldots \quad (2n - 3), \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ x = 2n - 2 & y = 1. \end{array}$$

a jich počet

$$1 + 2 + 3 + \ldots + (2n - 2) = \frac{(2n-2)(2n-1)}{2}.$$

Hledaná pravděpodobnost jest proto

$$\frac{(n-2)(n-1)}{(2n-2)(2n-1)} = \frac{\left(1 - \frac{2}{n}\right)\left(1 - \frac{1}{n}\right)}{\left(2 - \frac{2}{n}\right)\left(2 - \frac{1}{n}\right)}.$$

Má-li býti zlom v každém bodě hůlky možný, nutno předpokládati n libovolně velké, tedy $\lim n = \infty$. Následkem toho bude hledaná pravděpodobnost

$$p = \frac{1}{4}.$$

Jednoduché jest geometrické řešení: Považujme čísla x, y, z za souřadnice prostorové, potom představuje rovnice

$$x + y + z = 2n$$

trojúhelník ABC, t. j. souřadnice libovolného bodu uvedeného trojúhelníka $x_A = y_B = z_C = 2n$ (viz obr. 22.).

Rovnice

$$y + x = z,$$

jest **však** rovnicí roviny rovnoběžné s rovinou $X\,Y$, procházející bodem $z = n$. Tato rovnina dělí trojúhelník v $D\,C\,E$, v němž $y + x < z$, a v čtyrúhelník $D\,E\,A\,B$, v němž $y + x > z$. Tak vznikne $\overline{DE}$ a sestrojíme-li pomocí druhých podmínečných rovnic strany $\overline{EF}$ a $\overline{DF}$, obdržíme trojúhelník $D\,E\,F$, v němž body vyhovují všem třem rovnicím

$$x + y > z, \quad x + z > y, \quad z + y > x.$$

VIII. problém.

V následujícím podáme rozšíření věty Čebyševovy s aplikací na jistý problém geometrických pravděpodobností. Čebyšev uvažoval počet hodnot příslušných k veličinám $X_1, X_2, X_3 \ldots X_n$ konečný, kdežto zde bude předpokládáno, že ku př. k veličině X_1 přísluší nekonečný počet konečných veličin $x_1^{(i)}$, takže X_1 bude konečnou spojitou funkcí v uvažovaném intervalu (A, B) a pravděpodobnost vyskytnutí se $x_1^{(i)}$ bude dána pak výrazem: $f_1(x_1)\,d\,x_1$.

Dle věty o sčítání pravděpodobností jest pak

$$\int_A^B f_1(x_1)\,d\,x_1 = 1, \quad \int_A^B f_2(x_2)\,d\,x_2 = 1, \quad \int_A^B f_3(x_3)\,d\,x_3 = 1, \ldots\ldots,$$

kdež $f_1(x_1)\,d\,x_1$, $f_2(x_2)\,d\,x_2$, $f_3(x_3)\,d\,x_3, \ldots$ jsou elementární pravděpodobnosti vyskytnutí se veličin x. Dle rozšíření (na nekonečno) věty Čebyševovy jest pravděpodobnost P, že součet

$$x_1^{(\varkappa)} + x_2^{(\lambda)} + x_3^{(\mu)} + \ldots\ldots$$

jest obsažen mezi hranicemi

$$\sum_{i=1}^{n} \int_A^B x_i\, f_i(x_i)\,d\,x_i \mp \lambda \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \int_A^B x_i^2\, f_i(x_i)\,d\,x_i - \sum_{i=1}^{n} \left(\int_A^B x_i\, f_i(x_i)\,d\,x_i \right)^2}$$

větší než $1 - \frac{1}{\lambda^2}$, kde $\lambda > 1$.

Užijme této věty na následující problém: Na pevný kruh (k) o poloměru r jest vržen stejný kruh (l) n-kráte tak, že vzdálenost středů obou kruhů ϱ jest vázána podmínkou $\varrho \leq 2\,r$, čímž určen jest obor všech možných poloh kruhu (l), omezený kružnicí (K). Zavedeme-li středový úhel $\beta = \sphericalangle(\overline{SA}, \overline{SB})$ (viz obr. 23.), jest

$$\varrho = 2\,r \cos\frac{\beta}{2}.$$

Veličinou X_i nechť je označen soubor všech možných oběma kruhům společných plošek, takže při i-tém vrhu bude

$$x_i = r^2\,(2\,\beta - \sin\beta).$$

Proměnnou veličinou volme vzdálenost $\varrho = \overline{S\,S'}$ středů obou kružnic, jejíž obor proměnnosti dán jest nerovninou $0 \leq \varrho \leq 2\,r$. Elementární pravděpodobnost jest pak, píšeme-li jednoduše x místo x_i,

$$f(x)\,d\,x = \frac{2\,\pi\,\varrho\,d\,\varrho}{4\,\pi\,r^2},$$

s tím ve spojení s uvedenou již rovnicí

$$x = r^2\,(2\,\beta - \sin\beta);$$

vypočtěme, užijeme-li ještě vztahu $\varrho = 2\,r\cos\frac{\beta}{2}$:

$$\{X\} = \int_0^{2r} x\,f(x)\,d\,x = \int_0^{2r} r^2\,(2\beta - \sin\beta)\,.\,\frac{2\,\pi\,\varrho\,d\,\varrho}{4\,\pi\,r^2} = \frac{\pi\,r^2}{4},$$

$$\{X^2\} = \int_0^{2r} x^2 f(x)\,d\,x = \int_0^{2r} [r^2(2\beta - \sin\beta)]^2\,\frac{2\,\pi\,\varrho\,d\,\varrho}{4\,\pi\,r^2} =$$

$$= \left(\frac{\pi^2}{4} - \frac{4}{3}\right) r^4.$$

Jest patrno, že

$$\{X_1\} = \{X_2\} = \{X_3\} = \ldots$$

$$\{X_1^2\} = \{X_2^2\} = \{X_3^2\} = \ldots,$$

takže podle věty Čebyševovy, je-li počet veličin X_i celkem n, pravděpodobnost, že součet $x_1^{(\varkappa)} + x_2^{(\lambda)} + x_3^{(\mu)} + \ldots$ jest obsažen mezi hranicemi

$$\frac{n\,\pi\,r^2}{4} \pm \lambda\sqrt{n\left(\frac{3}{16}\,\pi^2 - \frac{4}{3}\right) r^4} = \frac{n\,\pi\,r^2}{4}\left(1 \pm \lambda\,\frac{4\sqrt{\frac{3}{16}\,\pi^2 - \frac{4}{3}}}{\pi\sqrt{n}}\right) =$$

$$= \frac{n\,\pi\,r^2}{4}\left(1 \pm \lambda\,\frac{0.915}{\sqrt{n}}\right),$$

jest větší než $1 - \frac{1}{\lambda^2}$.

Poznámky.

[1]) Že to, co se slovně nazývá pravděpodobností, jest rozdílné od mathematické, ukázal pěkně *Bolzano* (Wissenschaftslehre II., 185). Je-li $\frac{m}{n}$ mathematickou pravděpodobností, potom slovní pravděpodobnost jest dána mathematickým vzorcem

$$\frac{m}{n} - \frac{n}{m}.$$

[2]) Podle logiky jsou na př. dva výsledky stejně pravděpodobné, když v okamžitém stavu našich vědomostí nenalézáme nic, co by mluvilo pro větší pravděpodobnost jednoho nebo druhého. Takový princip nemůže býti pro svou subjektivnost podkladem mathem. pravděpodobnosti, která aby byla měřitelnou, musí především býti objektivní.

[3]) *Smoluchowski* (Naturwissenschaften, r. 1918) takto se vyjadřuje: „... dnes platí ještě věta, že žádná z jiných věd není založena na tak vratkých základech, jako počet pravděpodobnosti." Srovnej též *J. Kries* (Die Principien der Wahrscheinlichkeitsrechnung, 1886, str. 1) a *Mises* (Math. Zeitschrift. 1919, str. 52): „In der Tat kann man den gegenwärtigen Zustand kaum anders als dahin kennzeichnen, daß die Wahrscheinlichkeitsrechnung heute eine mathematische Disciplin nicht ist." Viz též: *Weber-Wellstein:* Angew. Elementarmath. II. díl, 2. vyd., str. 339 a *Poincaré:* Calcul des probabilités. Paris 1896, p. 1.

[4]) I novější filosofie se kloní k názoru, že pravděpodobnost jest fixí, na př. *E. v. Hartmann* v „Philosophie des Unbewußten," 7. vyd. Anhang: „Poněvadž přesně vzato, *náhoda vůbec neexistuje,* jest pravděpodobnost vlastně *fixí.* O ní lze totiž mluviti jen tenkráte, neznáme-li veškeré příčiny, jež zjev podmiňují, neboť kdybychom je znali, nemohli bychom mluviti o pravděpodobnosti, nýbrž o jistotě. Vzdor tomu, že jsme přesvědčeni o kausalitě zjevů, musíme si utvořiti *fixi náhody,* abychom mohli nauku o pravděpodobnosti vybudovati." Axiomaticky zpracovali základy počtu pravděpodobnosti: *É. Borel:* (Rendiconti del Circolo mathematico die Palermo, 1909), *Broggi:* (Inauguraldissertation, Göttingen, 1907), *Bohlmann* (Encyklopädie der mathem. Wissenschaften, sv. I. D. 4. *b*).

[5]) Jak počet pravděpodobnosti založiti na logických úvahách, ukázal *Bolzano* (Wissenschaftslehre, II. vyd. 1914, § 161). Srovnej: *H. Bergmann:* „Das philosophische Werk B. Bolzanos, 1919, str. 86; *J. Kries:* Logik, Tübingen 1916, str. 412 a 595; *Stumpf:* Psychologie und Erkenntnistheorie (Abh. der bair. A. d. W. 1891 (Mnichov) a tamtéž

1892, str. 11, 84, a především starší avšak platné dílo: *J. Kries:* Die Principien der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Z logiků jest na prvém místě nutno uvésti: *Sigwart:* Logik: Freiburg (J. C. B. Mohr); *Timerding:* Die Analyse des Zufalls, Brunšvík 1915.

[6]) Kdyby každé číslo nebylo *stejně možné,* museli bychom předpokládati nějakou toho příčinu na př. že kostka je *falešná,* t. zn., že geometrický střed kostky neodpovídá přesně těžišti atd. Naopak ukáží-li pokusy, že průměrně při velmi velkém počtu vrhů každé z čísel 1 až 6 stejně často padá, soudíme, že kostka jest *dobrá.* Viz: Pokusy kostkou, jež podal *O. Meisner* v Zeitschrift für Math. 1913, str. 149 a k tomu úvahy *R. Misesa* v Math. Zeitschrift V. svazek, str. 64 (1919). — K slovu *„stejně možné“* dlužno dodati, že tím je vlastně vysloveno tolik, co *„stejně pravděpodobné“*, neboť *možnost* nepřipouští nějakého *„více, méně“*; věc může býti jen *možnou* aneb *nemožnou,* stejně platí o *Huyghensově parafrási: Quod aeque facile evenire potest.* Školní učebnice podávající takovou definici mathem. pravděpodobnosti, podávají vlastně *tautologii*: *„Pravděpodobnost je pravděpodobnost.“*

[7]) K pokusům dlužno dodati následující:

Z 20.000 pokusů vykonaných švýcarským astronomem *Wolfem* plyne pro kombinaci

$$1,\ 1 \text{ počet } 547$$

místo theoretického

$$\frac{20.000}{36} = 556$$

a pro kombinaci

$$1,2 + 2,1$$

čísla

$$609 + 587 = 1196$$

místo

$$2 \times 556 = 1112.$$

Počet pokusů jest zde tak veliký, že můžeme s velkou pravděpodobností tvrditi, že kostky, s nimiž Wolf pracoval, nebyly mathematicky přesné.

[8]) Latina a italština má dva výrazy: *„verisimilis“* pravděpodobný a *„probabilis“* t. z. to, co náleží schváliti. I Němci začínají již zavrhovati slovo *„Wahrscheinlichkeit“* a užívají vždy více slova: *„Probabilität“* stejně jako Francouz neužívá slova *„vraisemblance“*, nýbrž *„probable“*. Zajímavé úvahy podává *Czuber:* Jahresbericht der Deut. Math. Vereinigung, 1899 VII. 2 ihned na počátku, jichž četbu vřele každému doporučujeme. Tamtéž jest i podána podrobná literatura sahající až po rok 1897, kterou s hlediska slovanských badatelů doplňují vhodně Poláka *W. Gosiewskiho:* Zasady rachunku prawdopodobieństwa, Warszawa 1906. Srovnej též § 15.

[9]) *Chr. Huyghens.* De ratiociniis in ludo aleae (1657) jako dodatek k dílu: F. A. *Schooten:* Exercitationum math. libri quinque. (Lugdunum Bat.) Dějiny počtu pravděpodobnosti podány jsou v následujících dílech: *M. Cantor:* Vorlesungen über Geschichte der Mathem., *E. Czuber* (viz pozn. 8) a *J. Todhunter:* History of the math. th. of Probability from the time of *Pascal* to that of Laplace. Cambr. 1865. Literární poznámky k jednotlivým kapitolám podává „Encyclopédie des Sciences mathé-

matiques. Tom I. Vol 4. Fasc. 1. (úplnější a lepší něm. vydání) a konečně *E. Czuber:* Wahrscheinlichkeitsrechnung, III. vyd. 1914 u Teubnera.

[10]) O různých modifikacích podobných přístrojů pojednává na př.: *P. Riebesell:* Die mathematischen Grundlagen der Variations- und Vererbungslehre, Lipsko 1916 a *Gruber Otto:* Experimentelles zum Gaussischen Fehlergesetz (Zeitschrift für Math. u. Physik. Bd. 56, 1908, str. 322; popis pokusů s aparátem *F. Galtona* t. zv. „*Quiucunx*“). Srov. též *W. Dyck:* Katalog mathem. und math.-physikalischer Modelle, Apparate und Instrumente, Mnichov 1892, str. 154 a dodatek, str. 6).

[11]) Viz: *Dan. Bernoulli:* Specimen theoriae novae de mensura sortis. Něm. vydání s poznámkami opatřil A. Pringsheim, Lipsko, 1896. — U nás o tomto problému psali: *Aug. Pánek* v Časopise pro pěst. mathem. a fysiky r. 6, str. 74 a *Aug. Seydler* tamtéž r. 19, str. 277. Literaturu podává *Czuber* ve své příručce, str. 122. K tomu *R. Mises,* Math. Zeitschrift, V. sv., str. 85 (1919).

[12]) *Frank:* Naturwissensch. 1919, str. 701 a 723 *Fürth:* Phys. Zeitschrift 1919 a *Lorentz,* Les théories statistiques en thermodynamique, 1916. *L. v. Borkiewicz:* Die radioaktive Strahlung als Gegenstand wahrscheinlichkeitstheoretischer Untersuchungen. Berlin 1913.

[13]) *R. v. Mises:* Die Naturwissenschaften 1919, str. 168, 186 a 205, kde kritisuje *Marbesovo* dílo „Die Gleichförmigkeit der Welt und die Wahrscheinlichkeitsrechnung“ a dále Math. Zeitschr., r. 1919 IV. sv., str. 1—27 a V. sv., str. 52—99. Misesova mathem. theorie jest vlastně *analytikou geometrických pravděpodobností.* To jest její theoretická cena, ale i chyba ve smyslu aplikace. Conf. *Helm:* Ann. der Naturphil. I. (1902), Die Wahrscheinlichkeitslehre als Theorie der Kollektivbegriffe.

[14]) *C. Stumpf* (Sitzungsberichte der k. bair. Akademie der Wiss. 1892) dokazuje z faktu, že algorithmus *math. pravděpodobnosti jest upotřebitelný i na geometrii,* nezávislost math. pravděpodobnosti na kausalitě! O geom. pravděpodobnosti viz *též H. Broggi:* Rend. del Circolo Math. di Palermo, sv. 28.

Dodatky.

Dodatek I. ku str. 41.

Vložíme-li do výrazu

$$P_{\alpha,\beta} = \frac{s!}{\alpha!\,(s-\alpha)!}\,p^{\alpha}\,q^{s-\alpha}$$

podle Stirlingova vzorce:

$$s! \doteq s^{s}\,e^{-s}\sqrt{2\pi s},$$

obdržíme:

$$P_{\alpha,\beta} = \frac{s^{s}\,e^{-s}\sqrt{2\pi s}\,p^{\alpha}\,q^{s-\alpha}}{\alpha^{\alpha}\,e^{-\alpha}\sqrt{2\pi\alpha}\,(s-\alpha)^{(s-\alpha)}\,e^{-(s-\alpha)}\sqrt{2\pi(s-\alpha)}}$$

$$= \frac{s^{s}\,p^{\alpha}\,q^{s-\alpha}}{\alpha^{\alpha}\,(s-\alpha)^{(s-\alpha)}}\sqrt{\frac{s}{2\pi\alpha(s-\alpha)}}$$

$$= \left(\frac{s\,p}{\alpha}\right)^{\alpha}\left(\frac{s\,q}{s-\alpha}\right)^{s-\alpha}\sqrt{\frac{s}{2\pi\alpha(s-\alpha)}}.$$

V případě maxima jest však podle str. 56

$$\alpha = a = p\,s,$$

$$s-\alpha = s-a = b = q\,s,$$

bude proto

$$max\,P_{\alpha,\beta} = \sqrt{\frac{s}{2\pi a(s-a)}} = \sqrt{\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{s}{a}\cdot\frac{1}{s}\cdot\frac{s}{s-a}}$$

čili

$$P_{a,b} = \frac{1}{\sqrt{2\pi s p q}}$$

a můžeme psáti:

$$P_{\alpha,\beta} = P_{a,b}\left(\frac{s\,p}{\alpha}\right)^{\alpha}\left(\frac{s\,q}{s-\alpha}\right)^{s-\alpha}.$$

Logarithmováním obdržíme dále

$$\log P_{\alpha,\beta} = \log P_{a,b} + \alpha \log \frac{s\,p}{\alpha} + (s-\alpha) \log \frac{s\,q}{s-\alpha}$$

$$= \log P_{a,b} - \alpha \log \frac{\alpha}{s\,p} - (s-\alpha) \log \frac{s-\alpha}{s\,q}.$$

Položme nyní

$$\alpha = a + r,$$

$$\beta = b - r = s - \alpha,$$

čímž

$$\frac{\alpha}{s\,p} = \frac{a+r}{s\,p} = 1 + \frac{r}{s\,p},$$

$$\frac{s-\alpha}{s\,q} = \frac{b-r}{s\,q} = 1 - \frac{r}{s\,q}$$

a dále

$$\alpha \log \frac{\alpha}{s\,p} = \alpha \log\left(1 + \frac{r}{s\,p}\right),$$

$$(s-\alpha) \log \frac{s-\alpha}{s\,q} = (s-\alpha) \log\left(1 - \frac{r}{s\,q}\right).$$

Jest ale v intervalu

$$-1 < x \leq +1$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots.$$

tudíž, podržíme-li jen prvé dva členy rozvoje,

$$\alpha \log\left(1 + \frac{r}{s\,p}\right) = \alpha \left(\frac{r}{s\,p} - \frac{r^2}{2\,s^2\,p^2}\right)$$

$$= (a+r)\left(\frac{r}{s\,p} - \frac{r^2}{2\,p^2\,s^2}\right)$$

$$= \frac{a}{s\,p}\,r + \frac{r^2}{s\,p} - \frac{a}{p\,s} \cdot \frac{r^2}{2\,p\,s}.$$

Poněvadž

$$a = s\,p,$$

bude

$$\alpha \log\left(1 + \frac{r}{s\,p}\right) = r + \frac{r^2}{s\,p} - \frac{r^2}{2\,s\,p} = r + \frac{r^2}{2\,s\,p}.$$

Stejně obdržíme

$$(s-\alpha)\log\left(1-\frac{r}{sq}\right)=-r+\frac{r^2}{2sq},$$

takže jest $\log P_{\alpha,\beta}$ dán tímto přibližným tvarem

$$\log P_{\alpha,\beta}=\log P_{a,b}-\frac{r^2}{2s}\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)$$

$$=\log P_{a,b}-\frac{r^2}{2spq}$$

a proto posléze

$$P_{\alpha,\beta}=\frac{1}{\sqrt{2spq}}e^{-\frac{r^2}{2pqs}}$$

Dodatek II.: Vzorec Stirlingův.

V mnohých problémech počtu pravděpodobnosti naskytá se často provésti přibližný výpočet $n!$ pro velmi velké n. V aproximacích toho druhu osvědčí se vždy užití známé *Stirlingovy* formule v textu několikráte užité

$$n! \doteq n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}.$$

K přesnému důkazu jejímu odkazujeme na učebnice analyse a zde podáváme toliko důkaz pocházející od Cauchyho, velmi jednoduchý a přehledný.

Ze známé relace odvozené Eulerem a vyjadřující $\sin \pi x$ nekonečným součinem

$$\sin \pi x=\pi x\prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{\nu^2}\right),$$

konvergujícím stejnoměrně pro $|x|<1$, vyplývá stejnoměrná konvergence v každém intervalu uvnitř $(-1, 1)$ řady

$$\log\frac{\sin \pi x}{\pi x}=\sum_{\nu=1}^{\infty}\log\left(1-\frac{x^2}{\nu^2}\right);$$

řada ta konverguje i absolutně, ježto všechny její členy jsou zápornými. Pišme ji ve tvaru

$$\log\sin \pi x=\log \pi x+\sum_{\nu=1}^{n}\log\left(1-\frac{x^2}{\nu^2}\right)+R_n,$$

kdež tedy

$$R_n = \log\left[\left(1 - \frac{x^2}{(n+1)^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{(n+2)^2}\right)\dots\right].$$

Integrál levé strany v mezích (0, 1) (viz K. Petr, Počet integrální, str. 223) jest

$$\int_0^1 \log \sin \pi x \, d x = -\log 2,$$

na pravé straně pak snadným počtem získáme

$$\int_0^1 \log \pi x \, d x = \log \pi - 1$$

a

$$\int_0^1 \log\left(1 - \frac{x^2}{\nu^2}\right) d x = (\nu + 1) \log \frac{\nu+1}{\nu} - (\nu - 1) \log \frac{\nu - 1}{\nu} - 2.$$

Tudíž

$$-\log 2 = \log \pi + \sum_{\nu=1}^{n}\left[(\nu+1) \log \frac{\nu+1}{\nu} - (\nu - 1) \log \frac{\nu-1}{\nu}\right] -$$

$$-(2n+1) + \int_0^1 R_n \, d x$$

čili

$$-\log 2 = \log \pi + \log \frac{n^n (n+1)^{n+1}}{(n!)^2} - (2n+1) +$$

$$+ \int_0^1 \log\left[\left(1 - \frac{x^2}{(n+1)^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{(n+2)^2}\right)\dots\right] d x.$$

Poněvadž

$$\left(1 - \frac{x^2}{(n+1)^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{(n+2)^2}\right)\dots = a_0 + a_1 x^2 + a_2 x^4 + \dots,$$

kde

$$a_0 = 1, \quad a_1 = -\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(n+i)^2}, \dots,$$

pro vzůstající n je řadou velmi rychle konvergentní a blížící se k jednotce pro n rostoucí nade všecky meze, lze zbytek nahraditi aproximativně výrazem tvaru

$$\log(1+\varepsilon), \qquad \varepsilon \rightarrow 0 \text{ pro } n \rightarrow \infty.$$

Přejdeme-li od logarithmů k číslům, z výše uvedené rovnice získáme

$$\frac{1}{2} = \pi \frac{n^n (n+1)^{n+1}}{(n!)^2} e^{-(2n+1)} (1+\varepsilon)$$

čili

$$(n!)^2 = 2\pi e^{-(2n+1)} n^n (n+1)^{n+1} (1+\varepsilon),$$

z čehož dále

$$n! = \sqrt{2\pi n} \,.\, e^{-n-\frac{1}{2}} n^n \left(\frac{n+1}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}} \left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Pišme poslední rovnici ve tvaru

$$n! = n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n} \left\{\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right) \sqrt{\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{e}}\right\},$$

kdež po dosti velké n vinutou závorku nahraďme výrazem $1+\vartheta_n$, takže

$$n! = n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}\,(1+\vartheta_n),$$

při čemž ϑ_n jest blízké nule; konečně pro $n \rightarrow \infty$ lze psáti

$$\lim_{n\rightarrow\infty} \left\{\frac{1\,.\,2\,.\,.\,.\,.\,n}{\sqrt{2\pi n}\,.\,n^n e^{-n}}\right\} = 1.$$

Tabulka integrálu $\Phi(x)$.

Definiční rovnice:

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-x^2} dx$$

$$\sqrt{\pi}\, \Phi(z) = 2 \left\{ \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1!\,3} + \frac{x^5}{2!\,5} + \ldots\ldots \right.$$

Konverguje dostatečně jen pro $x < 1$

$$\int_x^\infty e^{-x^2} dx = \frac{e^{-x^2}}{2x} \left\{ 1 - \frac{1}{2x^2} + \frac{1 \cdot 3}{(2x^2)^2} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{(3x^2)^3} + \ldots\ldots \right.$$

Konverguje dostatečně jen pro $x > 4$

$$\int_x^\infty e^{-x^2} dx = \frac{e^{-x^2}}{2x} \cdot \cfrac{1}{1 + \cfrac{\frac{1}{2x^2}}{1 + \cfrac{\frac{2}{2x^2}}{1 + \cfrac{\frac{3}{2x^2}}{1 + \cdots}}}}$$

$$\int_0^x e^{-x^2} dx + \int_x^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

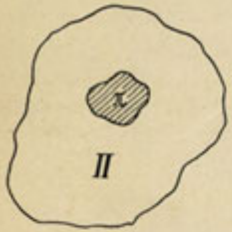
$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = 2\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0·00	0·0000	0011	0023	0034	0045	0056	0068	0079	0090	0102
0·01	0·0113	0124	0135	0147	0158	0169	0181	0192	0203	0214
0·02	0·0226	0237	0248	0259	0271	0282	0293	0305	0316	0327
0·03	0·0338	0350	0361	0372	0384	0395	0406	0417	0429	0440
0·04	0·0451	0462	0474	0485	0496	0507	0519	0530	0541	0552
0·05	0·0564	0575	0586	0597	0609	0620	0631	0642	0653	0665
0·06	0·0676	0687	0699	0710	0721	0732	0744	0755	0766	0777
0·07	0·0789	0800	0811	0822	0833	0845	0856	0867	0878	0890
0·08	0·0901	0912	0923	0934	0946	0957	0968	0979	0990	1002
0·09	0·1013	1024	1035	1046	1058	1069	1080	1091	1102	1113
0·10	0·1125	1136	1147	1158	1169	1180	1192	1203	1214	1255
0·11	0·1236	1247	1259	1270	1281	1292	1303	1314	1325	1336
0·12	0·1348	1359	1370	1381	1392	1403	1414	1425	1436	1448
0·13	0·1459	1470	1481	1492	1503	1514	1525	1536	1547	1558
0·14	0·1569	1581	1592	1603	1614	1625	1636	1647	1658	1669
0·15	0·1680	1691	1702	1713	1724	1735	1746	1757	1768	1779
0·16	0·1790	1801	1812	1823	1834	1845	1856	1867	1878	1889
0·17	0·1900	1911	1922	1933	1944	1955	1966	1977	1988	1998
0·18	0·2009	2020	2031	2042	2053	2064	2075	2086	2097	2108
0·19	0·2118	2129	2140	2151	2162	2173	2184	2194	2205	2216
0·20	0·2227	2238	2249	2260	2270	2281	2292	2303	2314	2324
0·21	0·2335	2346	2357	2368	2378	2389	2400	2411	2421	2432
0·22	0·2443	2454	2464	2475	2486	2497	2507	2518	2529	2540
0·23	0·2550	2561	2572	2582	2593	2604	2614	2625	2636	2646
0·24	0·2657	2668	2678	2689	2700	2710	2721	2731	2742	2753
0·25	0·2763	2774	2784	2795	2806	2816	2827	2837	2848	2858
0·26	0·2869	2880	2890	2901	2911	2922	2932	2943	2953	2964
0·27	0·2974	2985	2995	3006	3016	3027	3037	3047	3058	3068
0·28	0·3079	3089	3100	3110	3120	3131	3141	3152	3162	3172
0·29	0·3183	3193	3204	3214	3224	3235	3245	3255	3266	3276
0·30	0·3286	3297	3307	3317	3327	3338	3348	3358	3369	3379
0·31	0·3389	3399	3410	3420	3430	3440	3450	3461	3471	3481
0·32	0·3491	3501	3512	3522	3532	3542	3552	3562	3573	3583
0·33	0·3593	3603	3613	3623	3633	3643	3653	3663	3674	3684
0·34	0·3694	3704	3714	3724	3734	3744	3754	3764	3774	3784
0·35	0·3794	3804	3814	3824	3834	3844	3854	3864	3873	3883
0·36	0·3893	3903	3913	3923	3933	3943	3953	3963	3972	3982
0·37	0·3992	4002	4012	4022	4031	4041	4051	4061	4071	4080
0·38	0·4090	4100	4110	4119	4129	4139	4149	4158	4168	4178
0·39	0·4187	4197	4207	4207	4226	4236	4245	4255	4265	4274

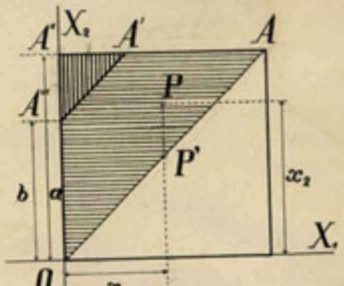
x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0·40	0·4284	4294	4303	4313	4322	4332	4341	4351	4361	4370
0·41	0·4380	4389	4399	4408	4418	4427	4437	4446	4456	4465
0·42	0·4475	4484	4494	4503	4512	4522	4531	4541	4550	4559
0·43	0·4569	4578	4588	4597	4606	4616	4625	4634	4644	4653
0·44	0·4662	4672	4681	4690	4699	4709	4718	4727	4736	4746
0·45	0·4755	4764	4773	4782	4792	4801	4810	4819	4828	4837
0·46	0·4847	4856	4865	4874	4883	4892	4901	4910	4919	4928
0·47	0·4937	4946	4956	4965	4974	4983	4992	5001	5010	5019
0·48	0·5027	5036	5045	5054	5063	5072	5081	5090	5099	5108
0·49	0·5117	5126	5134	5143	5152	5161	5170	5179	5187	5196
0·50	0·5205	5214	5223	5231	5240	5249	5258	5266	5275	5284
0·51	0·5292	5301	5310	5318	5327	5336	5344	5353	5362	5370
0·52	0·5379	5388	5396	5405	5413	5422	5430	5439	5448	5456
0·53	0·5465	5473	5482	5490	5499	5507	5516	5524	5533	5541
0·54	0·5549	5558	5566	5575	5583	5591	5600	5608	5617	5625
0·55	0·5633	5642	5650	5658	5667	5675	5683	5691	5700	5708
0·56	0·5716	5724	5733	5741	5749	5757	5765	5774	5782	5790
0·57	0·5798	5806	5814	5823	5831	5839	5847	5855	5863	5871
0·58	0·5879	5887	5895	5903	5911	5919	5927	5935	5943	5951
0·59	0·5959	5967	5975	5983	5991	5999	6007	6015	6023	6031
0·60	0·6039	6046	6054	6062	6070	6078	6086	6093	6101	6109
0·61	0·6117	6125	6132	6140	6148	6156	6163	6171	6179	6186
0·62	0·6194	6202	6209	6217	6225	6232	6240	6248	6255	6263
0·63	0·6270	6278	6286	6293	6301	6308	6316	6323	6331	6338
0·64	0·6346	6353	6361	6368	6376	6383	6391	6398	6405	6413
0·65	0·6420	6428	6435	6442	6450	6457	6464	6472	6479	6486
0·66	0·6494	6501	6508	6516	6523	6530	6537	6545	6552	6559
0·67	0·6566	6573	6581	6588	6595	6602	6609	6616	6624	6631
0·68	0·6638	6645	6652	6659	6666	6673	6680	6687	6694	6701
0·69	0·6708	6715	6722	6729	6736	6743	6750	6757	6764	6771
0·70	0·6778	6785	6792	6799	6806	6812	6819	6826	6833	6840
0·71	0·6847	6853	6860	6867	6874	6881	6887	6894	6901	6908
0·72	0·6914	6921	6928	6934	6941	6948	6954	6961	6968	6974
0·73	0·6981	6988	6994	7001	7007	7014	7021	7027	7034	7040
0·74	0·7047	7053	7060	7066	7073	7079	7086	7092	7099	7105
0·75	0·7112	7118	7124	7131	7137	7144	7150	7156	7163	7169
0·76	0·7175	7182	7188	7194	7201	7207	7213	7219	7226	7232
0·77	0·7238	7244	7251	7257	7263	7269	7275	7282	7288	7294
0·78	0·7300	7306	7312	7318	7325	7331	7337	7343	7349	7355
0·79	0·7361	7367	7373	7379	7385	7391	7397	7403	7409	7415

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0·80	0·7421	7427	7433	7439	7445	7451	7457	7462	7468	7474
0·81	0·7480	7486	7492	7498	7503	7509	7515	7521	7527	7532
0·82	0·7538	7544	7550	7555	7561	7567	7572	7578	7584	7590
0·83	0·7595	7601	7607	7612	7618	7623	7629	7635	7640	7646
0·84	0·7651	7657	7663	7668	7674	7679	7685	7690	7696	7701
0·85	0·7707	7712	7718	7723	7729	7734	7739	7745	7750	7756
0·86	0·7761	7766	7772	7777	7782	7788	7793	7798	7804	7809
0·87	0·7814	7820	7825	7830	7835	7841	7846	7851	7856	7862
0·88	0·7867	7872	7877	7882	7888	7893	7898	7903	7908	7913
0·89	0·7918	7924	7929	7934	7939	7944	7949	7954	7959	7964
0·90	0·7969	7974	7979	7984	7989	7994	7999	8004	8009	8014
0·91	0·8019	8024	8029	8034	8038	8043	8048	8053	8058	8063
0·92	0·8068	8073	8077	8082	8087	8092	8097	8101	8106	8111
0·93	0·8116	8120	8125	8130	8135	8139	8144	8149	8153	8158
0·94	0·8163	8167	8172	8177	8181	8186	8191	8195	8200	8204
0·95	0·8209	8213	8218	8223	8227	8232	8236	8241	8245	8250
0·96	0·8254	8259	8263	8268	8272	8277	8281	8285	8290	8294
0·97	0.8299	8303	8307	8312	8316	8321	8325	8329	8334	8338
0·98	0·8342	8347	8351	8355	8360	8364	8368	8372	8377	8381
0·99	0·8385	8389	8394	8398	8402	8406	8410	8415	8419	8423
1·0	0·8427	8468	8508	8548	8586	8624	8661	8698	8733	8768
1·1	0·8802	8835	8868	8900	8931	8961	8991	9020	9048	9076
1·2	0·9103	9130	9155	9181	9205	9229	9252	9275	9297	9319
1·3	0·9340	9361	9381	9400	9419	9438	9456	9473	9490	9507
1·4	0·9523	9539	9554	9569	9583	9597	9611	9624	9637	9649
1·5	0·9661	9673	9684	9695	9706	9716	9726	9736	9745	9755
1·6	0·9763	9772	9780	9788	9796	9804	9811	9818	9825	9832
1·7	0·9838	9844	9850	9856	9861	9867	9872	9877	9882	9886
1·8	0·9891	9895	9899	9903	9907	9911	9915	9918	9922	9925
1·9	0·9928	9931	9934	9937	9939	9942	9944	9947	9949	9951
2·0	0·9953	9955	9957	9959	9961	9963	9964	9966	9967	9969
2·1	0·9970	9972	9973	9974	9975	9976	9977	9979	9980	9980
2·2	0·9981	9982	9983	9984	9985	9985	9986	9987	9987	9988
2·3	0·9989	9989	9990	9990	9991	9991	9992	9992	9992	9993
2·4	0·9993	9993	9994	9994	9994	9995	9995	9995	9995	9996
2·5	0·9996	9996	9996	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9998
2·6	0·9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9999
2·7	0·9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999
2·8	0·9999	9999	9999	9999	9999	9999	1·000	1·000	1·000	1·000

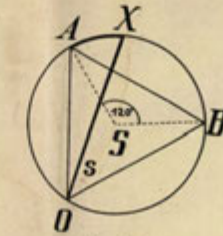
OBSAH.



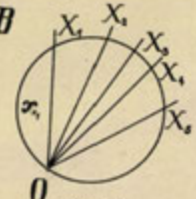
Obr. 13.



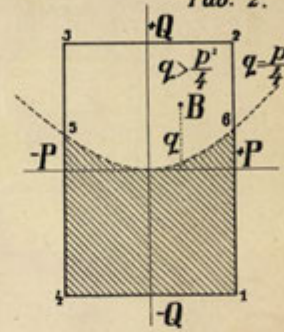
Obr. 14.



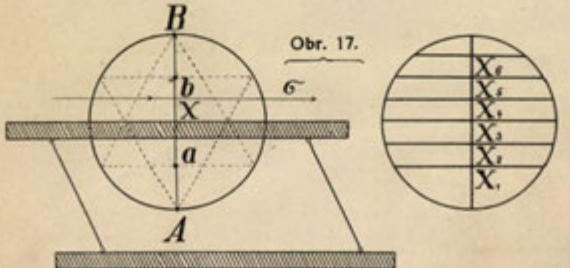
Obr. 15.



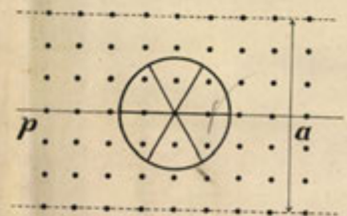
Obr. 16.



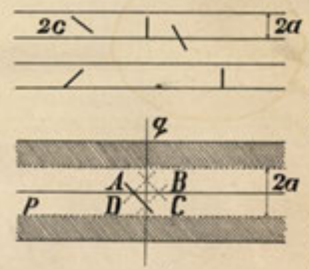
Obr. 18.

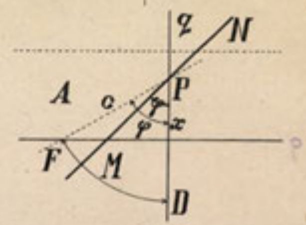


Obr. 17.

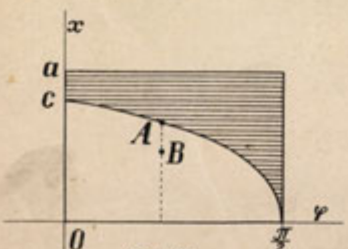


Obr. 20.

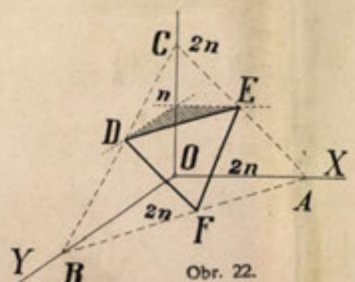




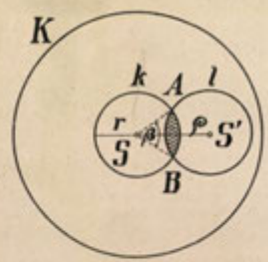
Obr. 19.



Obr. 21.



Obr. 22.



Obr. 23.